LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

SUR LE RAPPORT D'EMBRANCHEMENT ÉMISSION β^+-CAPTURE K : CAS DES TRANSITIONS PERMISES (II) (*)

Par R. BOUCHEZ (1), S. R. de GROOT (2), R. NATAF (3) et H. A. TOLHOEK (2).

Sommaire. — On discute dans le cas des transitions permises le calcul des probabilités de transition pour la capture d'électrons et l'émission β^+; on considère en détail, dans le cas des transitions permises et interdites, les relations entre les moments angulaires et les éléments de matrice nucléaire. Les nouvelles expériences que nous avons effectuées avec le ^{61}Cu nous ont permis, en première approximation, de lever les difficultés signalées dans un précédent article (R. Bouchez et G. Kayas, *J. Phys. Radium.*, 1949, **10**, p. 110); les résultats expérimentaux sur le rapport d'embranchement capture K-émission β^+ pour ^{61}Cu (0,38 ± 0,08), ^{64}Cu (2,65 ± 0,4), ^{107}Cd (320 ± 30) sont en bon accord avec les valeurs théoriques qui sont respectivement : 0,3; 2,4; 360.

1. Introduction.

Au cours d'un précédent article (4), l'un de nous, en collaboration avec G. Kayas, a déterminé expérimentalement le rapport d'embranchement $\rho = \frac{P_K}{P_+}$ concernant les noyaux ^{61}Cu et ^{64}Cu, qui se désintègrent tous deux par capture K et par émission de positons. Nous avions été amené à comparer ces résultats expérimentaux avec la théorie de la désintégration β et, dans le cas du ^{61}Cu, avions constaté un désaccord, signalé d'ailleurs auparavant, par Bradt et al. [19] et Alvarez [20]. Cette différence entre théorie et expérience nous conduit, dans le présent article, à revoir en détail dans le cas des transitions permises la relation entre les probabilités de capture K et d'émission de positons et en particulier les relations concernant les différents éléments de matrice nucléaires et les moments angulaires des niveaux.

2. Détermination de $\frac{P_K}{P_+}$ à l'aide de la théorie de la désintégration β.

Pour établir d'une façon aussi précise que possible la probabilité de capture K et celle d'émission β^+ il est nécessaire de rappeler les hypothèses et formules générales de la théorie classique de la désintégration β. Aussi nous avons tenu à préciser dans l'Appendice I la forme de l'hamiltonien d'interaction intervenant au cours des transitions par capture K et émission β^+, ainsi que la forme détaillée des fonctions d'ondes des électrons et neutrinos (5), solutions des équations de Dirac.

Pour calculer les probabilités de transition on aura à évaluer les fonctions d'ondes des leptons ψ et φ *au point où le nucléon se transforme*; comme on ne connaît pas les valeurs de ces fonctions à l'intérieur du noyau, on convient généralement de les prendre à la surface du noyau, $\psi(R)$, $\varphi(R)$. Nous utiliserons cette approximation.

En outre, on peut choisir pour ψ et φ soit des ondes planes, soit des ondes sphériques; le choix des ondes planes pour l'électron n'est possible que

(*) *Voir* aussi *Physica*, 1949, XV, **10**, p. 863.

(1) Institut du Radium, Laboratoire Curie, Paris.

(2) Institut de Physique théorique, Université, Utrecht, Pays-Bas.

(3) Collège de France, Laboratoire de Chimie nucléaire.

(4) R. Bouchez et G. Kayas, *J. Phys. Radium*, 1949, **10**, p. 110. On le désignera dans la suite par Art. I. Le présent article sera désigné par Art. II.

(5) On désignera dans la suite, comme le fait le Professeur Rosenfeld, par « leptons » l'ensemble des électrons et neutrinos, particules « légères ».

si l'on néglige l'influence du champ coulombien. Nous choisirons des ondes sphériques, ce qui permet de plus de rendre assez aisée la discussion des relations concernant les moments angulaires des niveaux nucléaires.

Enfin, dans toute la suite de cet article, on utilisera le système d'unités universelles : unité de masse, celle de l'électron au repos m; unité de vitesse, celle de la lumière c; unité d'action, $\frac{h}{2\pi} = \hbar$.

21. **Probabilité de capture** K. — A partir de la formule générale sur les probabilités de transition, on déduit la relation suivante donnant la probabilité de capture K :

$$P_K = 2\pi G^2 \sum_{M_f} \sum_{\substack{j_1 l_1 m_1 \\ j_2 l_2 m_2}} \left| \Sigma_k \int d\tau (\Psi_f^* \Omega Q_k \Psi_i)(\psi^* \Omega \varphi)_k \right|^2, \qquad (1)$$

avec

- G, constante de Fermi;
- ψ, fonction d'onde du spectre discontinu de l'électron;
- φ, fonction d'onde du spectre continu du neutrino normée en énergie;
- j_1, l_1, m_1, nombres quantiques pour le neutrino;
- j_2, l_2, m_2, nombres quantiques pour l'électron;
- Q_k, opérateur de transition pour le $k^{\text{ième}}$ nucléon (on doit sommer sur tous les nucléons : Σ_k);
- Ψ_i, fonction d'onde pour le noyau initial;
- Ψ_f, fonction d'onde pour le noyau final;
- $\sum_{M_f}$, sommation pour tous les états du noyau final, chaque état étant caractérisé par la valeur de son nombre quantique magnétique M_f. Cette écriture sera justifiée plus loin (§ 34);
- Ω, opérateur de la théorie de Dirac.

Les fonctions d'onde des leptons, ψ et φ, sont à évaluer à l'endroit du $k^{\text{ième}}$ nucléon. D'un point de vue général, en effet, tous les nucléons participent plus ou moins à la transition; on devrait donc faire la somme sur tous les nucléons, mais suivant notre hypothèse précédente on évaluera ψ et φ sur la surface du noyau. On peut donc écrire la relation (1)

$$P_K = 2\pi G^2 \sum_{M_f} \sum_{\substack{j_1 l_1 m_1 \\ j_2 l_2 m_2}} \left| \int (\Psi_f^* \Omega \Psi_i)(\psi^* \Omega \varphi)_R \, d\tau \right|^2.$$

Nous avons, pour simplifier l'écriture, omis Q_k et Σ_k.

A partir de cette relation, on détermine pour les différentes formes de l'interaction nucléaire Ω les formules complètes pour la capture K. Le détail des calculs est indiqué dans l'Appendice II où l'on a séparé la capture des deux électrons $K\left(m_1 = \frac{1}{2}, \; m_1' = -\frac{1}{2}\right)$.

D'après ces calculs, dans le cas des transitions permises, les fonctions d'ondes des leptons sont, en première approximation, indépendantes des variables angulaires. Elles sont donc constantes et nous pouvons les mettre en facteur devant l'intégrale

$$P_K = 2\pi G^2 \sum_{M_f} \sum_{\substack{j_1 l_1 m_1 \\ j_2 l_2 m_2}} |\psi^* \Omega \varphi|^2 \left| \int \Psi_f^* \Omega \Psi_i \, d\tau \right|^2.$$

Pour toutes les formes d'interaction, la probabilité de transition peut s'écrire

$$P_K^+ = \frac{G^2}{8\pi^2} |M^+|^2 q^2 g_K^2 \quad \left(\text{capt. d'un élect. } K : \quad m_1 = +\frac{1}{2}\right);$$

$$P_K^- = \frac{G^2}{8\pi^2} |M^-|^2 q^2 g_K^2 \quad \left(\text{capt. d'un élect. } K : \quad m_1 = -\frac{1}{2}\right).$$

On a indiqué dans le tableau I les valeurs des éléments de matrices nucléaires $|M^+|^2$ et $|M^-|^2$ correspondant à P_K^+ ou P_K^- et pour les différents Ω. Dans ce tableau, $\left|\vec{\sigma}\right|$ représente l'élément de matrice nucléaire que nous désignerons uniquement par la partie de l'invariant $\vec{\sigma}$ qui entre dans cet élément, c'est-à-dire

$$\left|\vec{\sigma}\right| = \sum_{M_f} \left| \int \Psi_f^* \vec{\sigma} \Psi_i \, d\tau \right|^2.$$

On remarque que *dans le cas des interactions S et V*, $P_K^+ = P_K^-$, *mais par contre*, P_K^+ *et* P_K^- *diffèrent dans le cas des interactions A et T*.

TABLEAU I.

Opérateur d'interaction nucléaire (*).	P_K^+.	P_K^-.
$S \simeq \beta$	$\lvert\beta\rvert^2$	$\lvert\beta\rvert^2$
$V \simeq 1$	$\lvert 1\rvert^2$	$\lvert 1\rvert^2$
$T \simeq \beta\vec{\sigma}$	$[\lvert\beta\sigma_z\rvert^2 + \lvert\beta(\sigma_x - i\sigma_y)\rvert^2]$	$[\lvert\beta\sigma_z\rvert^2 + \lvert\beta(\sigma_x + i\sigma_y)\rvert^2]$
$A \simeq \vec{\sigma}$	$[\lvert\sigma_z^2\rvert^2 + \lvert\sigma_x - i\sigma_y\rvert^2]$	$[\lvert\sigma_z\rvert^2 + \lvert\sigma_x + i\sigma_y\rvert^2]$
$P \simeq \beta\gamma_5$	$\lvert\beta\gamma_5\rvert^2$	$\lvert\beta\gamma_5\rvert^2$

(*) Dans le cas des transitions permises, il est légitime de négliger les seconds termes des opérateurs d'interaction Ω. Ceci résulte du fait que les vitesses des nucléons sont assez petites par rapport à c. Pour la même raison on peut assimiler l'opérateur β à l'unité et il en résulte que le facteur β ne joue qu'un rôle secondaire dans les opérateurs Ω : pratiquement $S \simeq V$ et $T \simeq A$.

Dans le cas de l'interaction $\vec{\sigma}$ (ou $\beta\vec{\sigma}$) admise actuellement de préférence aux interactions 1 (ou β) ou $\beta\gamma_5$ *les deux électrons K ont donc en général une probabilité différente d'être capturés par le noyau.*

La probabilité P_K totale de capture K s'obtient par addition de P_K^+ et P_K^- :

a. Cas de l'interaction 1 (ou β) :

$$P_K = \frac{G^2}{4\pi^2}|1|^2 q^2 g_K^2.$$

b. Cas de l'interaction $\vec{\sigma}$ (ou $\beta\,\vec{\sigma}$) :

$$P_K = \frac{G^2}{4\pi^2}\left[\left|\frac{\sigma_x + i\sigma_y}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{\sigma_x - i\sigma_y}{\sqrt{2}}\right|^2 + |\sigma_z|^2\right] q^2 g_K^2,$$

qui est égale, comme nous le verrons plus loin (§ 32) à

$$P_K = \frac{G^2}{4\pi^2}\left|\vec{\sigma}\right|^2 q^2 g_K^2, \quad \text{avec} \quad \left|\vec{\sigma}\right|^2 = |\sigma_x|^2 + |\sigma_y|^2 + |\sigma_z|^2.$$

Signalons que ces résultats sont légèrement différents de ceux obtenus par Marshak [5]; en effet, cet auteur écrit la probabilité de capture K sous la forme suivante :

$$P_K = \frac{G^2}{4\pi^2}\left|\frac{\sigma_x - i\sigma_y}{\sqrt{2}}\right|^2 n_K q^2 g_K^2,$$

n_K étant le nombre d'électrons de la couche K. On aura donc en général $n_K = 2$, ce qui revient à poser la probabilité de capture égale pour les deux électrons, d'où un résultat différent d'un facteur 2. D'autre part le seul élément de matrice nucléaire utilisé par Marshak est $\left|\frac{\sigma_x - i\sigma_y}{\sqrt{2}}\right|$, or la réduction à cette forme n'est pas possible dans tous les cas. Nous avons reçu une lettre de M. Marshak dans laquelle il écrit qu'il s'est lui-même aperçu de cette erreur et est en accord avec nos résultats. Nos formules peuvent aussi se ramener à celles données par Möller [6]; cependant cet auteur ne fait aucune discussion détaillée sur les éléments de matrice nucléaire.

Remarque sur la capture L. — La capture des électrons L_I, L_{II}, ... peut être calculée d'une façon complètement analogue. La probabilité est en général plus petite que pour la capture K. La capture L_I est de l'ordre de 10 pour 100 de la capture K dans les circonstances moyennes ($\varepsilon_0 \gg 1, Z \approx 50$). La capture L_{II}, ... peut être négligée. La probabilité de la capture L_I est donnée par

$$P_{L_1} = \frac{G^2}{4\pi^2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_L)^2 |g_{L_1}|^2 |M|^2,$$

avec

$$\varepsilon_L = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{4}},$$

énergie totale d'un électron de la couche L; ε_0, énergie libérée par la transition nucléaire; $|M|$ a la même signification que pour la capture K.

Remarquons enfin que les résultats concernant les probabilités de capture K, L, ... sont invariants pour le groupe des rotations de l'espace $\left(\text{la forme } \left|\frac{\sigma_x - i\sigma_y}{\sqrt{2}}\right| \text{ ne l'est pas}\right)$.

On peut, *a priori*, s'attendre à une telle invariance; on peut en effet considérer un noyau avec orientation quelconque et deux électrons K comme un système (ou plutôt selon Dirac et Von Neumann, un ensemble de Gibbs de systèmes) qui est invariant pour le groupe de rotations.

22. **Probabilité d'émission** β^+. — De même que dans le cas de la capture K, on part de la formule classique suivante :

$$P(\varepsilon)\,d\varepsilon = 2\pi G^2 \sum_{M_f} \sum_{\substack{j_1 l_1 m_1 \\ j_2 l_2 m_2}} \left| \int (\Psi_f^* \Omega \Psi_i)(\psi^* \Omega \varphi)\,d\tau \right|^2 d\varepsilon,$$

ψ et φ sont les fonctions d'onde de l'électron et du neutrino, appartenant au *spectre continu* et *normées par intervalle d'énergie*. Si l'on a une solution (ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4) pour l'énergie E on sait que l'on a, d'après l'équation de Dirac pour l'énergie $-E$, la solution (ψ_4^*, $-\psi_3^*$, $-\psi_2^*$, ψ_1^*), c'est-à-dire que

$$\psi_-^* = C\psi_+, \qquad C \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'émission de positons, selon la théorie des trous de Dirac, consiste en une capture d'un électron dans un état d'énergie négative et l'émission d'un neutrino d'énergie positive. Mais il résulte de la symétrie entre les charges positives et négatives qu'on peut prendre aussi des solutions à énergie positive pour les électrons et des solutions à énergie négative pour les neutrinos; c'est ce que nous avons fait dans nos calculs. Le cas de la désintégration β^+ se traite donc du point de vue formel comme celui de la désintégration β^-; la seule différence réside dans le signe de Z dans la fonction d'onde de l'électron : Z est > 0 pour l'émission β^-; $Z < 0$ pour l'émission β^+. Le détail des calculs, à peu près analogue à celui de la capture K, est effectué dans l'Appendice III.

Pour toutes les formes d'interaction, la probabilité de transition avec émission β^+ peut s'écrire avec les notations de l'Appendice I

$$P(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{G^2}{4\pi^2}|M|^2 q^2 (|g_0|^2 + |f_{-2}|^2)\,d\varepsilon,$$

comme pour la capture K :

a. pour l'interaction 1 (ou β) $|M|^2 = |1|^2$ (ou $|\beta|^2$)

b. pour l'interaction $\vec{\sigma}$ (ou $\beta\vec{\sigma}$).

$$|M|^2 \equiv \left[\left|\frac{\sigma_x - i\sigma_y}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{\sigma_x + i\sigma_y}{\sqrt{2}}\right|^2 + |\sigma_z|^2\right]$$

$$= [|\sigma_x|^2 + |\sigma_y|^2 + |\sigma_z|^2] = |\vec{\sigma}|^2$$

Finalement, en développant $|g_0|^2 + |f_{-2}|^2$ et en tenant compte de $P = \int_1^{\varepsilon_0} P(\varepsilon)\,d\varepsilon$ on retrouve la formule classique de Fermi (⁶)

$$\left\| P = \frac{G^2}{2\pi^3}|M|^2 \int_1^{\varepsilon_0} \varepsilon p q^2 F(Z, \varepsilon)\,d\varepsilon \equiv \frac{G^2}{2\pi^3}|M|^2 f(Z, \varepsilon_0) \right\|.$$

Comme pour la capture *K*, on voit que ce résultat pour la probabilité de transition liée à l'émission β^+ (ou β^-) a une forme invariante pour les rotations d'espace. On devait s'attendre *a priori*, à cette invariance pour les raisons énoncées ci-dessus.

3. Relations entre les éléments de matrice et les moments angulaires des noyaux.

31. Généralités. — Les relations que nous allons maintenant établir sont valables pour tous les types de transitions permises ou interdites.

L'élément de matrice nucléaire $|M|^2$ caractérise la transition de l'état initial J_i à l'état final J_f ; chaque état comprend $(2J+1)$ niveaux dégénérés, mais dont il faut tenir compte pour déterminer la probabilité totale de la transition. Pour calculer la grandeur relative des éléments de matrice, correspondant aux transitions partielles $(J_iM_i) \rightarrow (J_fM_f)$ on peut, dans le cas où l'interaction nucléaire est un vecteur, procéder de la même manière qu'en physique atomique pour l'effet Stark ou Zeeman : le vecteur champ électrique ou magnétique étant simplement remplacé par le vecteur d'interaction nucléaire, soit par exemple $\psi^*\vec{\sigma}\varphi$. Les résultats de la théorie des groupes [14, 15] s'appliquent immédiatement, on les a représentés dans le tableau II; ce tableau est identique à celui donnant, aux facteurs constants *a*, *b*, *c*, près, les « amplitudes » des composantes d'une raie donnée dans les effets Stark et Zeeman. Ce tableau donne les neuf cas pour lesquels les éléments de matrice ne sont pas nuls : par exemple, les probabilités de transition $(M_i|\sigma_z|M_i \pm 1)$ sont nulles pour $|\Delta J| = 0$ ou 1. Ce tableau est valable pour toute interaction vectorielle $\Omega \equiv \beta\vec{\sigma}$ ou $\vec{\sigma}$. Rappelons que, dans le cas de ces opérateurs, les transitions les plus probables, c'est-à-dire « permises » sont obtenues comme en physique atomique, pour $|\Delta J| = 0, 1$ (sauf $0 \rightarrow 0$) et sans changement de parité des fonctions d'onde des noyaux initial Ψ_i et final Ψ_f. Si l'on considère les interactions scalaires 1 ou β les transitions permises sont uniquement celles pour lesquelles $\Delta J = 0$ (et sans changement de parité).

Tableau II.

Éléments de matrice.	$J_f = J_i - 1$.	$\Delta J = 0$.	$J_f = J_i + 1$.
$(M_i\|\sigma_x + i\sigma_y\|M_i - 1) = P\sqrt{2}\ldots$	$-a\sqrt{(J_i+M_i)(J_i+M_i-1)}$	$b\sqrt{(J_i+M_i)(J_i-M_i+1)}$	$c\sqrt{(J_i-M_i+1)(J_i-M_i+2)}$
$(M_i\|\sigma_x - i\sigma_y\|M_i + 1) = Q\sqrt{2}\ldots$	$a\sqrt{(J_i-M_i)(J_i-M_i-1)}$	$b\sqrt{(J_i-M_i)(J_i+M_i+1)}$	$-c\sqrt{(J_i+M_i+1)(J_i+M_i+2)}$
$(M_i\|\sigma_z\|M_i) = R\ldots\ldots\ldots\ldots$	$a\sqrt{(J_i+M_i)(J_i-M_i)}$	bM_i	$c\sqrt{(J_i+M_i+1)(J_i-M_i+1)}$

Les nombres *a*, *b*, *c*, ne peuvent être déduits de considérations générales.

Ce tableau est valable pour toute transition s'effectuant par une interaction vectorielle. C'est le cas des transitions permises nucléaires avec $\Omega \equiv \beta\vec{\sigma}$ ou $\vec{\sigma}$.

32. La probabilité totale de transition est indépendante de M_i. — Il existe pour les transitions nucléaires une règle identique à celle de physique atomique sur l'indépendance du nombre quantique M_i de moment magnétique de l'état initial : *la probabilité totale A_{if} de transition d'un état initial J_i vers un état final J_f, lorsque l'hamiltonien du système est invariant pour les rotations de l'espace, est indépendant de M_i à la condition de sommer sur tous les niveaux dégénérés M_f de l'état final.*

Cette règle, précédemment énoncée par Marshak [5], est pour les transitions permises une conséquence immédiate du tableau II des éléments de matrice, en effet

$$S(M_i) = \sum_{M_f}\sum_{xyz} |(M_i|\sigma_x|M_f)|^2 = P^2 + Q^2 + R^2.$$

(⁶) Dans nos calculs nous avons négligé la masse μ du neutrino d'après les derniers résultats de Curran et al. [12] : $\mu \leq \frac{m}{300}$.

Si l'on prend $\mu \neq 0$, la formule s'écrit

$$P(\varepsilon) = \frac{G^2}{2\pi^3}|M|^2\left[1 - \frac{\mu}{\varepsilon(\varepsilon_0 - \varepsilon)}\right]\varepsilon p q(\varepsilon_0 - \varepsilon) F(Z, \varepsilon),$$

en fait le facteur supplémentaire entre crochets s'écrit

$$1 - \frac{m}{\varepsilon}\frac{\mu}{\varepsilon_0 - \varepsilon},$$

mais avec les unités choisies, $m = 1$.

Signalons que ce facteur correctif a été indiqué dans [3] avec un signe $+$, $1 + \frac{m}{\varepsilon}\frac{\mu}{\varepsilon_0 - \varepsilon}$; par contre, dans [13], le signe est celui que nous indiquons.

et l'on obtient pour

a. $\Delta J = -1$ $(J_f = J_i - 1)$:

$$S(M_i) = a^2 J_i(2J_i - 1);$$

b. $\Delta J = 0$:

$$S(M_i) = b^2 J_i(J_i + 1);$$

c. $\Delta J = +1$ $(J_f = J_i + 1)$:

$$S(M_i) = c^2(J_i + 1)(2J_i + 3).$$

Ces sommes sont bien indépendantes de M_i, ce qui indique que la probabilité de transition est indépendante de la direction déterminée par M_i. L'on pourrait *a priori* s'attendre à une telle conclusion, mais nous pensons qu'il est préférable d'en donner une démonstration exacte. Dans le cas des transitions interdites, pour lesquelles l'opérateur d'interaction n'est plus un vecteur, la démonstration a été publiée ailleurs par S. R. de Groot et H. A. Tolhoek [17].

33. **Application aux transitions nucléaires de la règle d'Ornstein-Burger.** — Soit donc A_{if} la probabilité totale de la transition $J_i \to J_f$ et soit A'_{fi} celle de la transition formelle $J_f \to J_i$, on peut alors écrire la relation suivante entre A_{if} et A'_{fi}

$$\frac{A_{if}}{A'_{fi}} = \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1}.$$

Cette règle est bien connue en spectroscopie sous le nom de règle des sommes d'Ornstein-Burger [16].

Cas d'un vecteur $\vec{\sigma}$. — La relation précédente est une conséquence des éléments de matrice du tableau III et de la règle générale du paragraphe 32; outre la somme

$$S(M_i) \equiv S \equiv \sum_{M_f} \sum_{xyz} |(J_i M_i | \sigma_x | J_f M_f)|^2,$$

considérons la somme

$$S'(M_f) \equiv S' \equiv \sum_{M_i} \sum_{xyz} |(J_i M_i | \sigma_x | J_f M_f)|^2,$$

on peut alors écrire, les probabilités A_{if} et A'_{fi} étant proportionnelles aux éléments de matrice S et S' :

$$A_{if} = AS \qquad \text{et} \qquad A'_{fi} = AS', \qquad \text{d'où} \qquad \frac{A_{if}}{A'_{fi}} = \frac{S}{S'};$$

or $\frac{S}{S'}$ se déduit du tableau II et est égal à $\frac{2J_f + 1}{2J_i + 1}$.

Cas général. — Pour le cas d'un opérateur d'interaction quelconque Ω, la probabilité de la transition $J_i \to J_f$ peut s'écrire

$$A_{if} = A \sum_{M_f} |\Omega_{if}|^2$$

et d'après la règle du paragraphe 32

$$A_{if} = \frac{A}{2J_i + 1} \sum_{M_i} \sum_{M_f} |\Omega_{if}|^2;$$

de même la probabilité de la transition formelle $J_f \to J_i$ peut s'écrire

$$A'_{fi} = A \sum_{M_i} |\Omega_{fi}|^2 = \frac{A}{2J_f + 1} \sum_{M_f} \sum_{M_i} |\Omega_{fi}|^2,$$

donc

$$A_{if}(2J_i + 1) = A'_{fi}(2J_f + 1) = \sum_{M_i} \sum_{M_f} |\Omega_{if}|^2,$$

A_{fi} peut être considéré soit comme la probabilité totale de la transition formelle $J_f \to J_i$, soit comme la somme des transitions partielles réelles aboutissant à un même état final

$$A'_{fi} \equiv A \sum_{M_i} |\Omega_{if}|^2;$$

ces deux notations sont identiques, puisque les opérateurs de la mécanique quantique sont tous hermitiens.

34. **Pour toutes les transitions $|M|^2$ peut être ramené à un seul ou, au plus, deux termes.** — Les résultats précédents justifient donc l'écriture de l'élément de matrice nucléaire

$$|M|^2 = \sum_{M_f} \left| \int \Psi_f^* \Omega \Psi_i \, d\tau \right|^2$$
$$= \sum_{M_f} \left| \int \Psi^*(J_f, M_f) \Omega \Psi(J_i, M_i) \, d\tau \right|^2$$

$|M|^2$ est indépendant de M_i, à la condition de sommer sur M_f.

341. Cas des transitions permises. — Soit $M_i = J_i$, par exemple, les éléments du tableau II se simplifient, nous les avons écrits dans le tableau III. D'après ce tableau on remarque immédiatement :

a. $J_i - J_f = 1$, $J_i > J_f$. $|M|^2$ n'a qu'un seul terme d'où $A_{if} = A|M|^2$ également;

b. $J_i = J_f$. $|M|^2$ a deux termes; A_{if} et A'_{fi} ont deux termes;

c. $J_i - J_f = -1$, $J_i < J_f$. $|M|^2$ a trois termes, mais on sait que $A_{if} = \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} A'_{fi}$ et A'_{fi} n'a qu'un seul terme.

342. Cas des transitions interdites. — Pour le cas général des transitions interdites, et lorsqu'on considère seulement les plus grands termes pour les leptons, l'élément de matrice nucléaire peut aussi se ramener à un seul terme ou, au plus, à deux termes. En outre si le moment angulaire total emporté par les leptons est plus grand que 1, l'élé-

TABLEAU III.

Elément de matrice.	$\Delta J = -1$.	$\Delta J = 0$.	$\Delta J = +1$.
$(M_i = J_i \| \sigma_x + i\sigma_y \| M_f = M_i - 1)$	$-a\sqrt{2J_i(2J_i-1)}$	$b\sqrt{2J_i}$	$c\sqrt{2}$
$(M_i = J_i \| \sigma_x - i\sigma_y \| M_f = M_i + 1)$	o	o	$-c\sqrt{(2J_i+1)(2J_i+2)}$
$(M_i = J_i \| \sigma_z \| M_f = M_i)$	o	bJ_i	$c\sqrt{2J_i+1}$

Schéma pour les transitions partielles de A_{if} $(M_i = J_i)$..................

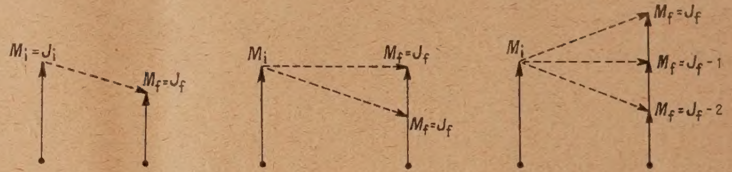
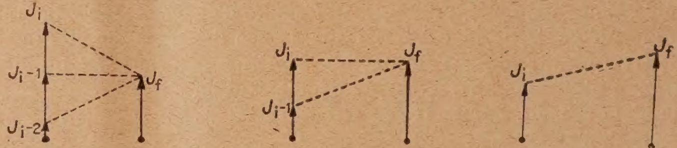


Schéma pour les transitions partielles de A'_{fi} $(M_f = J_f)$..................



ment de matrice se réduit toujours à un seul terme.

Pour démontrer cette propriété nous utiliserons d'abord une règle concernant l'ordre de grandeur des fonctions d'ondes des leptons. On a vu dans l'Appendice I que les fonctions d'onde de l'électron ψ et du neutrino φ sont d'autant plus grandes que j_1, et j_2 respectivement sont plus petits. Il en résulte que $\varphi^*\varphi$ est d'autant plus grand que $j_1 + j_2$ est plus petit. Posons $\vec{k} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$, k nombre quantique du moment angulaire total des leptons peut prendre les valeurs de la suite $j_1 + j_2, \ldots$ à $\ldots, |j_1 - j_2|$. Supposons k fixé; on distingue deux cas :

a. $k > 0$: k est alors la plus petite valeur possible de $j_1 + j_2$;

b. $k = 0$: la plus petite valeur de $j_1 + j_2$ est 1 $\left(j_1 = j_2 = \frac{1}{2}\right)$.

En résumé, la plus grande valeur de $\varphi^*\varphi$ s'obtient pour k; mais remarquons que la plus grande valeur de $\varphi^*\varphi$ est la même pour $k = 1$ et pour $k = 0$. Considérons ensuite la transition $J_i M_i \rightarrow J_f M_f$ avec émission de leptons emportant le moment angulaire total $\vec{k}$, tel que $\vec{J}_i - \vec{J}_f = \vec{k}$. Le nombre quantique k peut donc prendre les valeurs de la suite $J_i + J_f, \ldots$ à $\ldots, |J_i - J_f|$. Introduisons aussi le nombre quantique μ du moment magnétique total des leptons, le principe de conservation du moment angulaire s'écrit

$$M_i = M_f + \mu.$$

a. $J_i > J_f$: la plus petite valeur de k est

$$|\Delta J| = |J_i - J_f|$$

et si l'on choisit $M_i = J_i$, on a nécessairement

$$M_i - M_f = J_i - J_f \quad \text{et} \quad \mu = k.$$

Pour $J_i > J_f$, $|M|^2$ se réduit donc à un seul terme.

b. $J_i < J_f$: on se ramène au cas précédent en appliquant la règle

$$\frac{A_{if}}{A'_{fi}} = \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1}$$

c. $J_i = J_f$: la plus petite valeur de k est $k = 0$, si l'on choisit $M_i = J_i$ on a $M_f = J_f$. Mais dans ce cas on a vu ci-dessus que la contribution $k = 1$ est du même ordre de grandeur : on doit donc considérer non seulement $|M|^2$ pour $M_f = J_f$, mais aussi pour $M_f = J_f - 1$; A'_{fi} ne peut être considéré avec avantage, il possède deux termes également.

En résumé :

Pour $J_i \gtrless J_f$, $|M|^2$ se réduit à un seul terme.
Pour $J_i = J_f$, $|M|^2$ se réduit à deux termes.

4. Le rapport d'embranchement $\frac{P_K}{P_+}$; comparaison avec l'expérience.

41. Formules donnant $\frac{P_K}{P_+}$. — Dans le cas des transitions permises, l'élément de matrice

$$|M|^2 = \sum_{M_f} \left| \int \Psi_f^* \Omega \Psi_i \, d\tau \right|^2$$

caractérise le passage de l'état Ψ_i à l'état Ψ_f; $\Omega = 1$ ou $\vec{\sigma}$ suivant le type d'interaction utilisé. Lorsque cette transition s'effectue avec émission β^+ ou par capture K, $|M|^2$ est indépendant du mode de transformation et conserve la même valeur dans les deux cas. Il en résulte qu'il disparaît dans le calcul du rapport des probabilités $\frac{P_K}{P_+}$ à partir des for-

mules (§ 21 et 22) :

$$\frac{P_K}{P_+} = \frac{\frac{G^2}{4\pi^2} q^2 g_K^2}{\frac{G^2}{2\pi^3}\int_1^{\varepsilon_0} \varepsilon p q^2 F(Z, \varepsilon)\,d\varepsilon} = \frac{\pi}{2}\,\frac{(\varepsilon_0+\varepsilon_K)^2 g_K^2}{f_+(Z, \varepsilon_0)},$$

si l'on tient compte de la capture L on aura

$$\frac{P_K + P_{L_1}}{P_+} = \frac{\pi}{2}\,\frac{(\varepsilon_0+\varepsilon_K)^2 g_K^2 + (\varepsilon_0+\varepsilon_{L_1})^2 g_{L_1}^2}{f_+(Z, \varepsilon_0)}.$$

Ce sont précisément ces formules que nous avons utilisées dans l'article I. Ces formules sont valables lorsque les transitions sont non seulement permises, mais aboutissent dans le cas de la capture et de l'émission β^+ au *même niveau final*; nous donnerons plus loin des exemples sur ce sujet. Il ne faut pas oublier d'autre part que dans ces formules on s'est limité au terme angulaire Y_{00}^2, le terme suivant proportionel à Z est en général négligeable, mais en toute rigueur il ne peut plus être négligé pour Z élevé.

Remarquons enfin que $\frac{P_K}{P_+}$ outre l'indépendance par rapport à l'élément de matrice $|M|^2$ l'est aussi par rapport à la constante de Fermi G^2. Ces grandeurs sont précisément celles sur lesquelles on possède très peu de renseignements. La comparaison de $\frac{P_K}{P_+}$ avec l'expérience constitue donc un test quantitatif précis de la théorie générale de la désintégration β.

42. **Comparaison avec l'expérience**. — On connaît encore peu de transitions permises, s'effectuant par capture K et émission β^+, et pour lesquelles on ait déterminé avec précision le rapport d'embranchement $\frac{P_K}{P_+}$. Nous avons résumé dans le tableau IV les renseignements que l'on possède actuellement sur ces transitions.

TRANSITION $^{107}Cd \rightarrow {}^{107}Ag^*$.

Le schéma de cette transition permise, mais complexe, d'après Bradt et al. [19], est le suivant (*fig.* 1). Bien que la transition soit complexe, il est possible d'utiliser la formule précédente : d'une part, l'émission et la capture amènent de l'état initial ^{107}Cd au *même état final* ^{107}Ag (9/2), d'autre part on peut considérer avec une approximation suffisante la transition comme simple en négligeant le faible (4×10^{-3}) embranchement comportant le rayonnement γ de 0,846 MeV. Les calculs conduisent à $f_+(Z, \varepsilon_0) \simeq 8,7\times 10^{-3}$ pour $\varepsilon_0 = 1,63$ et $g_K^2 = 0,30$ d'où $\frac{P_K}{P_+} \simeq 360$; l'expérience [19] donne 320 ± 30. L'accord est excellent.

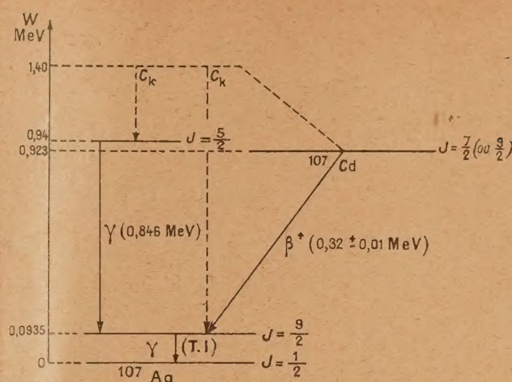


Fig. 1. — Schéma de la transition ^{107}Cd — ^{107}Ag, d'après Bradt et al [19].

TRANSITION $^{64}Cu \rightarrow {}^{64}Ni$.

Cette transition a été étudiée en détail au cours de l'article I. Les résultats sont indiqués dans le tableau IV et l'accord est aussi excellent. Nous désirerions simplement faire une remarque concernant l'estimation par le calcul du rapport d'embranchement $\frac{P_1}{P_2}$ de la capture complexe :

transition (1) : $^{64}Cu(J=1) \rightarrow {}^{64}Ni(0)$;

transition (2) : $^{64}Cu(1) \rightarrow {}^{64}Ni^*(1)$;

d'après les relations sur les éléments de matrice, on doit écrire en toute rigueur

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\left|\int \Psi^*(0,0)\vec{\sigma}\Psi(1,1)\right|^2}{\left\{\left|\int \Psi^*(1,1)\vec{\sigma}\Psi(1,1)\right|^2 + \left|\int \Psi^*(1,0)\vec{\sigma}\Psi(1,1)\right|^2\right\}}\left(\frac{\varepsilon_0^{(1)}+\varepsilon_K}{\varepsilon_0^{(2)}+\varepsilon_K}\right)^2 = \frac{|M_1|^2}{|M_2|^2 + |M_2'|^2}\times 27,5.$$

Nous avons indiqué dans le tableau V les valeurs du rapport de ces éléments de matrice à partir des résultats expérimentaux de $\frac{P_2}{P_+}$. On voit que

$$|M_1|^2 \simeq 3[|M_2|^2 + |M_2'|^2],$$

dans notre article I nous avions supposé ce rapport des éléments de matrice égal à 1. Cette valeur a peu d'influence sur $\left(\frac{P_K}{P_+}\right)_{th}$ qui subit une modification inférieure à 3 pour 100 qu'on néglige. D'une manière générale la connaissance précise du rapport d'embranchement des transitions complexes permettra d'obtenir des renseignements sur les éléments de matrice et les fonctions d'ondes nucléaires des niveaux stables et excités; ces renseignements peuvent être utiles surtout pour les noyaux légers.

TABLEAU IV.

Transitions.	ρ_{exp}.	ρ_{th}.	Références.
^{107}Cd (7/2 ou 9/2) → $^{107}Ag^{\star}$ (9/2)...	320 ± 30	360	Bradt et al. [19]
^{64}Cu (1) → ^{64}Ni (0)......	2,65 ± 0,4	2,4	R. Bouchez et G. Kayas [I]
	3,5 ± 1,0	–	C. S. Cook et L. M. Langer [18]
^{61}Cu → ^{61}Ni.........	0,45 ± 0,06	0,3	R. Bouchez et G. Kayas [I] et [II]
	0,38 ± 0,08	–	R. Bouchez [II]
	$\left[\frac{\rho_{64}}{\rho_{61}}\right]_{exp}$.	$\left[\frac{\rho_{61}}{\rho_{64}}\right]_{th}$.	
	5	8	Alvarez [20]
	5,5 ± 0,3	–	Bradt et al. [19]
	4,8 ± 0,4	–	R. Bouchez et G. Kayas [I]
	≃ 7	–	R. Bouchez [II]

TABLEAU V.

$\frac{P_2}{P_+}$.	$\frac{P_1}{P_2}$ (★).	$\frac{\lvert M_1\rvert^2}{\lvert M_2\rvert^2+\lvert M_2'\rvert^2}$.	Références.
≃ 0,1	≃ 25	≃ 1	Bradt et al. [19]
< 0,05	> 50	> 2	R. Bouchez et G. Kayas [I]
0,025 ± 0,005	100 ± 20	3,5 ± 0,7	Deutsch [21]

(★) $\frac{P_1}{P_2} \simeq \frac{P_K}{P_+} : \frac{P_2}{P_+}$.

TRANSITION $^{61}Cu \rightarrow {}^{61}Ni$

Cette transition a été étudiée en détail dans l'article I. C'est une transition qui semble simple et permise; aussi le désaccord entre théorie et expérience, signalé par plusieurs auteurs, était assez surprenant, d'autant plus que l'accord est excellent pour ^{64}Cu et ^{107}Cd. Cette différence nous a amené à revoir en détail la théorie et les mesures expérimentales. Il ne semble pas que ce désaccord puisse être expliqué par la théorie : $\frac{P_K}{P_+}$ est donné par les mêmes relations, pour les trois transitions : ^{61}Cu, ^{64}Cu, ^{107}Cd, et l'on ne conçoit pas une modification pour l'une qui ne changerait pas les autres.

Du point de vue expérimental, l'un de nous a repris les mesures avec le même appareillage que celui décrit dans l'article I, mais en y apportant quelques améliorations : le nouveau résultat obtenu est (0,38 ± 0,08), on peut donc en première approximation considérer le désaccord comme levé.

Voici les modifications apportées aux expériences de l'article I :

a. COMPTEURS A XÉNON. — On a utilisé des compteurs remplis de Xe (18,5 cm : Hg de pression totale de Xe, 10 pour 100 alcool) pour lesquels l'efficacité au rayonnement X K_α Ni atteignait environ 90 pour 100. Cette grande efficacité avantageait considérablement le rayonnement **X** par rapport au rayonnement γ d'annihilation, en particulier lors des mesures avec champ magnétique. Cette nouvelle étude nous a permis de remarquer que nous avions dans le cas des compteurs à argon (art. I) sous-estimé le nombre d'impulsions dues au rayonnement d'annihilation produit dans le canaliseur et les diaphragmes : la valeur (0,55 ± 0,06) est donc trop grande et devient, en tenant compte de l'effet des photons d'annihilation (0,45 ± 0,06).

b. PRÉCAUTIONS CONTRE LA CONTAMINATION DES SOURCES DE ^{61}Cu PAR ^{64}Cu. — Nous avons étudié la possibilité d'une contamination du Ni par le porte-cible en laiton du cyclotron; les traitements chimiques et les électrolyses utilisées dans la préparation des sources de ^{61}Cu, à partir de la cible de Ni, ne séparent pas en effet le ^{64}Cu de contamination. Au cours de nos précédentes expériences, notre critère de pureté était l'étude de la décroissance de la raie d'annihilation du ^{61}Cu, suivie à la chambre d'ionisation; toutes ces mesures indiquaient une période pure de (3,35 ± 0,1) heures et s'il y avait contamination le nombre de photons d'annhilation du ^{64}Cu restait inférieur à 2 à 3 pour 100. Mais une telle contamination de 3 pour 100 observée sur les photons d'annihilation correspond à une augmentation apparente de $\left(\frac{P_K}{P_+}\right)_{61}$ de plus de 10 pour 100. Nous avons effectué deux nouvelles séries de mesures en protégeant la cible de Ni par une mince feuille d'Al de 10 μ (7).

c. SOURCES MINCES. — Pour réduire les effets d'absorption, de diffusion, de back-scattering, etc., nous avons encore diminué l'épaisseur des sources et supports. On a ainsi réalisé des sources de ^{61}Cu de masse superficielle inférieure au milligramme

(7) Dans le cas, improbable, d'une légère contamination, le résultat de nos expériences (Art. I) serait 0,42 au lieu de 0,45

par centimètre carré (surface environ 6 mm^2) et déposées sur un film de chlorure de Polyvinyle ([8]) de 0,1 à 0,2 mg : cm^2.

Les nouvelles mesures effectuées sur la transition $^{61}Cu \rightarrow {}^{61}Ni$ conduisent à admettre pour le rapport d'embranchement $\frac{P_K}{P_+} = (0{,}38 \pm 0{,}08)$. Il faut bien remarquer que l'erreur standard indiquée est cohérente avec les mesures expérimentales, mais qu'une erreur systématique peut toujours intervenir.

Il n'est plus possible d'affirmer l'existence d'un désaccord entre la valeur théorique 0,3 et les résultats expérimentaux; toutefois un tel désaccord ([9]) ayant déjà été observé par Bradt d'une part et Alvarez d'autre part, il serait souhaitable de procéder à une nouvelle détermination de $\frac{P_K}{P_+}$ par une méthode différente.

Nous considérerons pour l'instant, qu'en première approximation, le rapport $\frac{P_K}{P_+}$ donné par la théorie de la désintégration β s'accorde bien avec les valeurs expérimentales, du moins pour les transitions permises.

Note ajoutée sur épreuves :

G. E. Owen vient de publier (*Phys. Rev.* 1950 sous presse) un article sur la désintégration du ^{61}Cu — (Je remercie vivement le Professeur C. S. Cook d'avoir bien voulu me communiquer le manuscrit de ce mémoire avant sa publication) — D'après les résultats de G. E. Owen, le spectre des positons du ^{61}Cu indique nettement un excès de particules pour les énergies inférieures à 550 kV. La présence d'autre part d'une raie γ nucléaire de 655 kV dans le spectre des photoélectrons montre que la désintégration est complexe : 5 % des positons iraient vers un état excité du ^{61}Ni. La valeur théorique 0,3 du rapport P_K/P_+ que nous avons mesuré se trouve ainsi modifiée :

$$\frac{P_K}{P_+} = \frac{P_1^K + P_2^K}{P_1^+ + P_2^+} = \frac{P_1^K}{P_1^+} \cdot \frac{1 + \frac{P_2^K}{P_1^K}}{1 + \frac{P_2^+}{P_1^+}}$$

d'une part d'après les expériences de G. E. Owen $P_2^+/P_1^+ \simeq 5/95$, d'autre part un calcul analogue à celui effectué au paragraphe 42 pour la désintégration complexe du ^{64}Cu permet d'écrire

$$\frac{P_2^K}{P_1^K} = \frac{\sum_{M_f} \left| \int \psi^*({}^{61}Ni^*)\, \vec{\sigma}\, \psi({}^{61}Cu) \right|^2}{\sum_{M_f} \left| \int \psi^*({}^{61}Ni)\, \vec{\sigma}\, \psi({}^{61}Cu) \right|^2} \times \left(\frac{\varepsilon_0^{(2)} + \varepsilon_K}{\varepsilon_0^{(1)} + \varepsilon_K} \right)^2 \simeq 0{,}5$$

le rapport des éléments de matrices nucléaires étant environ égal à l'unité. D'où $\frac{P_K}{P_+} \simeq 0{,}3 \cdot 1{,}5\, \frac{95}{100} \simeq 0{,}43$ (valeur expérimentale : 0,38 ± 0,08). L'accord semble maintenant excellent.

R. B.

([8]) Nous remercions M. le Professeur G. Champetier, qui nous a conseillé d'utiliser ce haut polymère, ainsi que G. Kayas avec qui nous avons mis au point la réalisation des films minces.

([9]) La correction due à l'effet des photons d'annihilation est notablement différente pour ^{61}Cu et ^{64}Cu ; c'est peut être la cause de l'écart observé par différents auteurs (voir Tableau V) entre les valeurs expérimentales et théoriques de $\frac{P_{61}}{P_{64}}$. En tenant compte de cette différence de correction le rapport devient environ 7 et n'est plus en désaccord avec la valeur théorique (en tenant compte des résultats de G. E. Owen, voir Note sur épreuves, cette valeur théorique serait environ 6).

APPENDICE I.

La forme générale (*voir* [1, 2, 3, 4]) que nous supposons pour l'hamiltonien d'interaction entre les nucléons et les leptons est

$$H_\beta \equiv G[(\psi^* \Omega_L \varphi) Q \Omega_N + (\psi^* \Omega_L \varphi)^* Q^+ \Omega_N^*] \quad (A.1)$$

avec

G, constante de Fermi;
ψ, fonction d'onde de l'électron;
φ, fonction d'onde du neutrino;
Ω_L, opérateur de la théorie de Dirac pour les leptons;
Ω_N, opérateur de la théorie de Dirac pour les nucléons;
Q, opérateur de transition pour les nucléons.

Le premier terme de l'équation (A.1) s'applique au cas de l'émission β^- : $Q \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ transforme un neutron en proton; le second terme à celui de l'émission β^+ et de la capture K : $Q^+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ transforme un proton en neutron. Au lieu de ce second terme, nous emploierons la forme équivalente $(\psi^* \Omega_L \varphi) Q^+ \Omega_N$.

Pour les calculs des fonctions d'onde des leptons nous utiliserons les solutions du spectre continu et discontinu du problème de Kepler selon la théorie de Dirac. Parce qu'on peut choisir des formes différentes pour l'équation de Dirac, indiquons celle utilisée dans cet article (cette équation a été utilisée sous cette forme par Bethe, Rose, Hill et Landshoff, [7, 8, 9,]

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{i}{\hbar c}\left(E + \frac{Ze^2}{r} + mc^2\right)\psi_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi_4}{\partial x} - i\frac{\partial \psi_4}{\partial y} = 0, \\
&\frac{i}{\hbar c}\left(E + \frac{Ze^2}{r} + mc^2\right)\psi_2 - \frac{\partial \psi_4}{\partial z} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + i\frac{\partial \psi_3}{\partial y} = 0, \\
&\frac{i}{\hbar c}\left(E + \frac{Ze^2}{r} - mc^2\right)\psi_3 + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - i\frac{\partial \psi_2}{\partial y} = 0, \\
&\frac{i}{\hbar c}\left(E + \frac{Ze^2}{r} - mc^2\right)\psi_4 - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + i\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (A.2)$$

Pour les solutions on doit distinguer deux cas :

Type a. $j = l + \frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1 &= i\left(\frac{l - m + \frac{3}{2}}{2l + 3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{l+1}^{m-\frac{1}{2}} f_l \\
\psi_2 &= i\left(\frac{l + m + \frac{3}{2}}{2l + 3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{l+1}^{m+\frac{1}{2}} f_l \\
\psi_3 &= \left(\frac{l + m + \frac{1}{2}}{2l + 1}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{l}^{m-\frac{1}{2}} g_l \\
\psi_4 &= \left(\frac{l - m + \frac{1}{2}}{2l + 1}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{l}^{m+\frac{1}{2}} g_l
\end{aligned}\right\} \quad (\text{A.3})$$

$$l \geq 0, \qquad -(l+1) \leq m - \frac{1}{2} \leq l, \qquad (-j \leq m \leq j).$$

Type b. $j = l - \frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1 &= i\left(\frac{l + m - \frac{1}{2}}{2l - 1}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{l-1}^{m-\frac{1}{2}} f_{-l-1} \\
\psi_2 &= -i\left(\frac{l - m - \frac{1}{2}}{2l - 1}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{l-1}^{m+\frac{1}{2}} f_{-l-1} \\
\psi_3 &= \left(\frac{l - m + \frac{1}{2}}{2l + 1}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{l}^{m-\frac{1}{2}} g_{-l-1} \\
\psi_4 &= \left(\frac{l + m + \frac{1}{2}}{2l + 1}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{l}^{m+\frac{1}{2}} g_{-l-1}
\end{aligned}\right\} \quad (\text{A.4})$$

$$l \geq 1, \qquad -l \leq m - \frac{1}{2} \leq l - 1, \qquad (-j \leq m \leq j).$$

Les fonctions Y_l^μ sont les fonctions sphériques normées. Les fonctions f et g représentent la partie radiale et dépendent donc de r seulement. Il est pratique d'introduire le paramètre $\varkappa$ dans les expressions de f et g :

$$\varkappa = \left\{\begin{array}{lll} -\left(j + \frac{1}{2}\right) = -(l+1) & \text{si } j = l + \frac{1}{2} & (\text{type } a), \\ j + \frac{1}{2} \;=\; l & \text{si } j = l - \frac{1}{2} & (\text{type } b). \end{array}\right\} \quad (\text{A.5})$$

Nous pouvons donc caractériser f et g uniquement par $\varkappa$. On trouve après introduction des unités universelles.

a. Pour le spectre discontinu (*cf.* [8]) :

$$\left\{\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = -\frac{\sqrt{\Gamma(2\gamma + n' + 1)}}{\Gamma(2\gamma + 1)\sqrt{n'!}} \times \sqrt{\frac{1 \mp \varepsilon}{4N(N - \varkappa)}}\left(\frac{2\alpha Z}{N}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\alpha Z r}{N}}\left(\frac{2\alpha Z r}{N}\right)^{\gamma - 1}$$
$$\times\left[\pm n' F\left(-n' + 1, 2\gamma + 1, \frac{2\alpha Z r}{N}\right) + (N - \varkappa) F\left(-n', 2\gamma + 1, \frac{2\alpha Z r}{N}\right)\right], \quad (\text{A.6})$$

avec

$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{N^2}}$, énergie;

$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$, constante de structure fine;

Z, charge du noyau;

$\gamma = \sqrt{\varkappa^2 - \alpha^2 Z^2}$;

$N = \sqrt{n^2 - 2n'(|\varkappa| - \gamma)}$, $\left(1 - \varepsilon^2 = \frac{\alpha^2 Z^2}{N^2}\right)$;

$n = n' + |\varkappa|$, n est le nombre quantique principal de la théorie non relativiste. Si l'on néglige les effets relativistes, on a $N = n$; on pourrait appeler N, le nombre quantique principal apparent.

$$F(a, b; x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a + n)}{\Gamma(b + n)}\frac{x^n}{n!}$$

est une fonction hypergéométrique.

Dans ce qui suit nous nous servons de la valeur de la partie radiale pour $r = R$ (R, rayon du noyau); on voit que $\alpha Z R \ll 1$, on peut donc développer f et g en série de puissances de $\alpha Z R$. Le premier et plus grand terme est proportionnel à $(\alpha Z R)^{\gamma - 1}$.

L'ordre de grandeur de g est donc déterminée par j, et l'on a $g \gg f$ (A.7)

b. Pour le spectre continu (*cf.* Rose [9]) :

$$r\left\{\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = \frac{(1 \mp \varepsilon)^{\frac{1}{2}}(2pr)^\gamma e^{\frac{\pi\alpha Z\varepsilon}{2p}}\left|\Gamma\left(\gamma + \frac{i\alpha Z\varepsilon}{p}\right)\right|}{2(\pi p)^{\frac{1}{2}}\Gamma(2\gamma + 1)}$$
$$\times\left[e^{-ipr}\sqrt{-\left(K - \frac{i\alpha Z}{p}\right)\left(\gamma + i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p}\right)} \times F\left(\gamma + 1 + i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p}, 2\gamma + 1, 2ipr\right) \mp \text{c.c.}\right], \quad (\text{A.8})$$

avec $p = (\varepsilon^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$, quantité de mouvement de l'électron à grande distance du noyau;

$(1 - \varepsilon)^{\frac{1}{2}} = + i(\varepsilon - 1)^{\frac{1}{2}}$ dans le cas de f;

c.c. = la quantité complexe conjuguée de la première expression entre crochets.

Ces expressions donnent les fonctions d'onde du spectre continu normées par intervalle d'énergie.

Dans ce qui suit nous employons la valeur de la partie radiale pour $r = R$; on peut développer selon les puissances de $pR \ll 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dans le cas des énergies relativistes } (\varepsilon > 1) \text{ le plus grand terme est donc déterminé par } j.\\ \text{Dans les cas des énergies non-relativistes } (\varepsilon \approx 1)\text{; il provient d'ailleurs de } g.\end{array}\right\} \quad (A.9)$$

On pose $F = 1$ pour $r = R$ en première approximation.

Les fonctions d'onde pour le neutrino ont une forme plus simple que pour l'électron, le neutrino n'ayant pas de charge électrique ni de masse. On peut les écrire

$$\begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{|\varkappa|}{\varkappa} \end{Bmatrix} \left(\frac{q}{2r}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\left|\varkappa \mp \frac{1}{2}\right|}(qr) \quad (A.10)$$

ou si l'on se sert des indices l (*cf.* [5], p. 434, dans son article Marshak a normé par particule dans une sphère de rayon R, dans cet article nous avons normé en énergie) :

$$\left.\begin{array}{l} f_l = \left(\frac{q}{2r}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{3}{2}}(qr),\\ g_l = \left(\frac{q}{2r}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(qr),\\ f_{-l-1} = \left(\frac{q}{2r}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l-\frac{1}{2}}(qr),\\ g_{-l-1} = \left(\frac{q}{2r}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(qr). \end{array}\right\} \quad (A.11)$$

Les fonctions J_ν sont les fonctions de Bessel; q quantité de mouvement du neutrino (égale à l'énergie dans les unités relativistes). Ces expressions donnent les fonctions d'onde du spectre continu normées en énergie. On obtient l'ordre de grandeur de ces fonctions pour r petit à partir de la formule

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) \approx \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{z^{n-\frac{1}{2}}}{1.3\ldots(2n+1)}, \quad (A.12)$$

valable pour $|z| < 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{De même que dans le cas des électrons, l'ordre de grandeur des fonctions d'onde radiale du neutrino est déterminée par } j.\end{array}\right\} \quad (A.13)$$

APPENDICE II.

La relation donnant la probabilité de capture K s'écrit

$$P_K = 2\pi G^2 \sum_{M_f} \sum_{\substack{j_1 l_1 m_1 \\ j_2 l_2 m_2}} \left| \int (\Psi_f^* \Omega \Psi_i)(\psi^* \Omega \varphi)_R \, d\tau \right|^2; \quad (A.14)$$

remarquons qu'on doit sommer pour toutes les possibilités des nombres quantiques jlm pour les électrons (indice 1) et les neutrinos (indice 2). Suivant les formes de l'opérateur Ω déduites de la théorie de Dirac, les termes sous le signe $\int$ peuvent s'écrire

$$\left.\begin{array}{lll} S = (\Psi_f^* \beta \Psi_i)(\psi^* \beta \varphi), & & \\ V = (\Psi_f^* 1 \Psi_i)(\psi^* \varphi), & & -(\Psi_f^* \vec{\alpha} \Psi_i)(\psi^* \vec{\alpha} \varphi), \\ T = (\Psi_f^* \beta \vec{\sigma} \Psi_i)(\psi^* \beta \vec{\sigma} \varphi), & & +(\Psi_f^* \beta \vec{\alpha} \Psi_i)(\psi^* \beta \vec{\alpha} \varphi), \\ A = (\Psi_f^* \vec{\sigma} \Psi_i)(\psi^* \vec{\sigma} \varphi), & & -(\Psi_f^* \gamma_5 \Psi_i)(\psi^* \gamma_5 \varphi), \\ P = & & (\Psi_f^* \beta \gamma_5 \Psi_i)(\psi^* \beta \gamma_5 \varphi). \\ \text{« Grands ».} & & \text{« Petits ».} \end{array}\right\} \quad (A.15)$$

On obtient ces expressions S, V, T, A, P, si l'on suppose respectivement l'interaction scalaire, vectorielle polaire, tensorielle, vectorielle axiale et pseudoscalaire.

Nous considérons maintenant les fonctions d'onde du neutrino et de l'électron. Nous écrivons seulement les plus grandes composantes selon (A.7) et (A.9). De cette manière nous obtenons un nombre très limité de termes pour les transitions permises. Dans le cas du neutrino les fonctions d'onde avec $j = \frac{1}{2}$ sont

$$\begin{array}{c} \\ \varphi_1\ldots \\ \varphi_2\ldots \\ \varphi_3\ldots \\ \varphi_4\ldots \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{I.} \\ \begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ Y_{00}\, g_0^{\nu} \end{pmatrix}, \\ \varphi_{\text{I}} \\ l = 0, \quad m = -\frac{1}{2}, \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{II.} \\ \begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ Y_{00}\, g_0^{\nu} \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}, \\ \varphi_{\text{II}} \\ l = 0, \quad m = \frac{1}{2}, \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{III.} \\ \begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ Y_{00} f_{-2}^{\nu} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}, \\ \varphi_{\text{III}} \\ l = 1, \quad m = -\frac{1}{2}, \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{IV.} \\ \begin{pmatrix} Y_{00} f_{-2}^{\nu} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}. \\ \varphi_{\text{IV}} \\ l = 1, \quad m = \frac{1}{2}. \end{array} \quad (A.16)$$

Nous employons $\varphi_{\text{I}}, \ldots, \varphi_{\text{IV}}$ comme abréviation pour les fonctions d'onde complètes $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ dans les cas I, ..., IV. Les fonctions d'onde g_0^{ν} et f_{-2}^{ν} du neutrino peuvent être développées suivant les puissances de qr. On a alors comme premiers termes

$$f_{-2}^{\nu} = \frac{q}{\sqrt{\pi}} \quad \text{et} \quad g_0^{\nu} = \frac{q}{\sqrt{\pi}} \quad [cf.\ (A.11) \text{ et } (A.12)].$$

Pour les électrons, on admet que l'on est dans la région non relativiste, l'ordre de grandeur des fonctions d'onde est alors déterminé par g [*cf.* (A.7)] et nous avons

$$\begin{matrix}\psi_1\ldots\ldots\\ \psi_2\ldots\ldots\\ \psi_3\ldots\ldots\\ \psi_4\ldots\ldots\end{matrix}\quad \overset{(1).}{\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\\ \ldots\ldots\\ Y_{00}\,g_K\end{pmatrix}},\qquad \overset{(2).}{\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\\ Y_{00}\,g_K\\ \ldots\ldots\end{pmatrix}};\qquad (\text{A}.18)$$

$$\psi(1).\qquad\qquad \psi(2).$$

$$l=0,\quad m=-\frac{1}{2}.\qquad l=0,\quad m=\frac{1}{2}.$$

$\psi(1)$ et $\psi(2)$ indiquent les fonctions d'onde complètes (ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4), g_k est donnée par (A.6).

Pour calculer d'après les équations (A.15) les combinaisons des fonctions d'ondes (A.16) et (A.18), précisons les matrices utilisées par les expressions (A.19) ci-dessous.

Il résulte des formes de ces matrices que les combinaisons de III et IV avec (1) et (2) sont nulles ou petites [selon (A.7) et (A.9)] pour les invariants S, V, T, A.

$$\left.\begin{array}{l}
\beta=\begin{pmatrix}1&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&1&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&-1&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&-1\end{pmatrix},\qquad 1=\begin{pmatrix}1&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&1&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&1&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&1\end{pmatrix};\\[2ex]
\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1&\cdot&\cdot\\ 1&0&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&0&1\\ \cdot&\cdot&1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i&\cdot&\cdot\\ i&0&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&0&-i\\ \cdot&\cdot&i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0&\cdot&\cdot\\ 0&-1&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&1&0\\ \cdot&\cdot&0&-1\end{pmatrix};\\[2ex]
\beta\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1&\cdot&\cdot\\ 1&0&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&0&-1\\ \cdot&\cdot&-1&0\end{pmatrix},\quad \beta\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i&\cdot&\cdot\\ i&0&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&0&i\\ \cdot&\cdot&-i&0\end{pmatrix};\quad \beta\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0&\cdot&\cdot\\ 0&-1&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&-1&0\\ \cdot&\cdot&0&1\end{pmatrix};\\[2ex]
\beta\gamma_5=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&-i&0\\ \cdot&\cdot&0&-i\\ i&0&\cdot&\cdot\\ 0&i&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.
\end{array}\right\}\quad (\text{A}.19)$$

Les combinaisons de I et II avec (1) et (2) sont pour V et A.

$$V\left\{\begin{array}{l}
\psi^{\star}_{(1)}\varphi_{\text{I}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}Y^{2}_{00}\,g^{\star}_K\,q,\\
\psi^{\star}_{(1)}\varphi_{\text{II}}=0,\\
\psi^{\star}_{(2)}\varphi_{\text{I}}=0,\\
\psi^{\star}_{(2)}\varphi_{\text{II}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}Y^{2}_{00}\,g^{\star}_K\,q.
\end{array}\right\}\quad (\text{A}.20)$$

$$A\left\{\begin{array}{ll}
\psi^{\star}_{(1)}\sigma_x\varphi_{\text{I}}=0, & \psi^{\star}_{(1)}\sigma_x\varphi_{\text{II}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}Y^{2}_{00}\,g^{\star}_K\,q,\\
\psi^{\star}_{(1)}\sigma_y\varphi_{\text{I}}=0, & \psi^{\star}_{(1)}\sigma_y\varphi_{\text{II}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}Y^{2}_{00}\,g^{\star}_K\,q,\\
\psi^{\star}_{(1)}\sigma_z\varphi_{\text{I}}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}Y^{2}_{00}\,g^{\star}_K\,q; & \psi^{\star}_{(1)}\sigma_z\varphi_{\text{II}}=0;\\
\psi^{\star}_{(2)}\sigma_x\varphi_{\text{I}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}Y^{2}_{00}\,g^{\star}_K\,q, & \psi^{\star}_{(2)}\sigma_x\varphi_{\text{II}}=0,\\
\psi^{\star}_{(2)}\sigma_y\varphi_{\text{I}}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}Y^{2}_{00}\,g^{\star}_K\,q, & \psi^{\star}_{(2)}\sigma_y\varphi_{\text{II}}=0.\\
\psi^{\star}_{(2)}\sigma_z\varphi_{\text{I}}=0; & \psi^{\star}_{(2)}\sigma_z\varphi_{\text{II}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}Y^{2}_{00}\,g^{\star}_K\,q.
\end{array}\right\}\quad (\text{A}.21)$$

S et T. — Les expressions pour S et T sont respectivement les mêmes que pour V et A (sauf pour le signe). Pour l'invariant P on doit considérer les combinaisons de (1) et (2) avec III et IV; les autres combinaisons sont nulles ou petites. Il résulte de (A.16), que la partie P

$$P\left\{\begin{array}{l}
\psi^{\star}_{(1)}\beta\gamma_5\varphi_{\text{III}}=\frac{i}{\sqrt{\pi}}Y^{2}_{00}\,g^{\star}_K\,q.\\
\psi^{\star}_{(1)}\beta\gamma_5\varphi_{\text{IV}}=0.\\
\psi^{\star}_{(2)}\beta\gamma_5\varphi_{\text{III}}=0,\\
\psi^{\star}_{(2)}\beta\gamma_5\varphi_{\text{IV}}=\frac{i}{\sqrt{\pi}}Y^{2}_{00}\,g^{\star}_K\,q.
\end{array}\right.\quad (\text{A}.22)$$

concernant les nucléons est petite en comparaison des parties analogues pour les autres invariants; cependant nous ne voulons pas omettre ce terme, car il est le seul.

Cas de l'invariant V **(ou** S**).** — A partir de (A.14) et (A.20), après sommation sur $j\,l\,m$ (A.16), on obtient pour chaque électron K :

$$P^{+}_{K}=P_{K}=\frac{G^2}{8\pi^2}\,|1|^2\,(\varepsilon_0+\varepsilon_K)^2\,g^2_K;\qquad (\text{A}.23)$$

$q=\varepsilon_0+\varepsilon_K$ en unités universelles, ε_0 est l'énergie

disponible pour l'émission β^+ en compétition avec la capture K;

$\varepsilon_K = \sqrt{1 - \alpha^2 Z^2} \approx 1$ est l'énergie d'un électron de la couche K.

La capture K est possible si $\varepsilon_0 + \varepsilon_K > 0$ l'émission β^+, si $\varepsilon_0 > 1$.

Parce que pour les interactions V ou S les deux électrons K sont équivalents, on obtient pour la probabilité totale pour la capture K

$$P_K = \frac{G^2}{4\pi^2} |1|^2 (\varepsilon_0 + \varepsilon_K)^2 g_K^2. \qquad (A.24)$$

Cas de l'invariant A (ou T). — A partir de (A.21), on obtient de même pour l'électron

$$K: \quad m_1 = +\frac{1}{2}.$$

$$P_K^+ = \frac{G^2}{8\pi^2} [|\sigma_z|^2 + |\sigma_x - i\sigma_y|^2] (\varepsilon_0 + \varepsilon_K)^2 g_K^2 \qquad (A.25)$$

et pour l'électron $K: m_1 = -\frac{1}{2}$,

$$P_K^- = \frac{G^2}{8\pi^2} [|\sigma_z|^2 + |\sigma_x + i\sigma_y|^2] (\varepsilon_0 + \varepsilon_K)^2 g_K^2. \qquad (A.26)$$

A partir de (A.6) on déduit la valeur de

$$g_K^2 = \frac{1 + \varepsilon_K}{2\Gamma(2\gamma + 1)} (2\alpha Z_{\text{eff}})^3 (2\alpha Z_{\text{eff}} R)^{2\gamma - 2}, \qquad (A.27)$$

avec

$$\gamma = \varepsilon_K = \sqrt{1 - \alpha^2 Z^2}$$

et

$$g_{L_1}^2 = \frac{(1 + \varepsilon_L)(2\gamma + 1)(2\gamma + 2)^{\frac{1}{2}}}{4\Gamma(2\gamma + 1)\left[(2\gamma + 2)^{\frac{1}{2}} + 1\right]} \times \left[\frac{2\alpha Z_{\text{eff}}}{(2\gamma + 2)^{\frac{1}{2}}}\right]^3 \left[\frac{2\alpha Z_{\text{eff}} R}{(2\gamma + 2)^{\frac{1}{2}}}\right]^{2\gamma - 2}, \qquad (A.28)$$

avec

$$\varepsilon_L = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{4}}.$$

APPENDICE III.

La probabilité de l'émission β^* s'écrit

$$P(\varepsilon)\, d\varepsilon = 2\pi G^2 \sum_{M_f} \sum_{\substack{j_1 l_1 m_1 \\ j_2 l_2 m_2}} \left| \int (\Psi_f^* \Omega \Psi_i)(\psi_+^* \Omega \varphi_-) \right|^2 d\varepsilon, \qquad (A.29)$$

ψ_+, fonction d'onde de l'électron à énergie positive;
φ_-, fonction d'onde du neutrino à énergie négative.

Les plus grandes fonctions d'onde sont celles pour $j = \frac{1}{2}$. La solution du problème de Kepler donne pour l'électron, si nous écrivons seulement les plus grands termes

$$j = \frac{1}{2}. \quad \begin{matrix} \psi_1 \ldots \\ \psi_2 \ldots \\ \psi_3 \ldots \\ \psi_4 \ldots \end{matrix} \quad \overset{(1).}{\underset{l = 1, \; m = -\frac{1}{2}.}{\begin{pmatrix} \cdots \\ Y_{00} f_{-2} \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}}}, \quad \overset{(2).}{\underset{l = 1, \; m = \frac{1}{2}.}{\begin{pmatrix} Y_{00} f_{-2} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}}}, \quad \overset{(3).}{\underset{l = 0, \; m = -\frac{1}{2}.}{\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ Y_{00} g_0 \end{pmatrix}}}, \quad \overset{(4).}{\underset{l = 0, \; m = \frac{1}{2}.}{\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ Y_{00} g_0 \\ \cdots \end{pmatrix}}}. \qquad (A.30)$$

Les solutions analogues d'énergie négative pour le neutrino sont :

$$\begin{matrix} \varphi_1 \ldots \\ \varphi_2 \ldots \\ \varphi_3 \ldots \\ \varphi_4 \ldots \end{matrix} \quad \overset{\text{I.}}{\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ -Y_{00} f_{-2}^{\nu *} \\ \cdots \end{pmatrix}}, \quad \overset{\text{II.}}{\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ Y_{00} f_{-2}^{\nu *} \end{pmatrix}}, \quad \overset{\text{III.}}{\begin{pmatrix} Y_{00} g_0^{\nu *} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}}, \quad \overset{\text{IV.}}{\begin{pmatrix} \cdots \\ -Y_{00} g_0^{\nu *} \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}}. \qquad (A.31)$$

Les produits $\psi^* \Omega \varphi$, qui donnent maintenant des résultats différents de zéro (plus précisément non petits) sont (pour tous les invariants, excepté P) :

(1) ou (2) avec III ou IV
et (3) ou (4) avec I ou II.

Les fonctions d'onde f_2^ν et g_0^ν du neutrino (A.17) sont des expressions réelles ainsi que Y_{00} et l'on peut omettre les astérisques dans (A.31). On obtient les expressions pour $\psi^* \Omega \varphi$ de (A.19), (A.30), (A.31) et (A.17). Le calcul donne pour l'invariant V :

$$\left.\begin{aligned} \psi^*_{(1)} \varphi_{IV} &= -\frac{q}{\sqrt{\pi}} Y^2_{00} f^*_{-2}. \\ \psi^*_{(2)} \varphi_{III} &= \frac{q}{\sqrt{\pi}} Y^2_{00} f^*_{-2}; \end{aligned}\right\} \qquad (A.32)$$

$$\left.\begin{aligned} \psi^*_{(3)} \varphi_{II} &= \frac{q}{\sqrt{\pi}} Y^2_{00} g^*_0, \\ \psi^*_{(4)} \varphi_{I} &= \frac{q}{\sqrt{\pi}} Y^2_{00} g^*_0. \end{aligned}\right\} \qquad (A.33)$$

Les expressions pour S sont les mêmes que pour V, seulement les signes dans (A.33) sont opposés.

On obtient pour A :

$$\left.\begin{array}{ll}
\psi^*_{(1)}\sigma_x\varphi_{\text{III}} = \dfrac{q}{\sqrt{\pi}}Y^2_{00}f^*_{-2}, & \psi^*_{(1)}\sigma_x\varphi_{\text{IV}} = 0, \\
\psi^*_{(1)}\sigma_y\varphi_{\text{III}} = i\dfrac{q}{\sqrt{\pi}}Y^2_{00}f^*_{-2}, & \psi^*_{(1)}\sigma_y\varphi_{\text{IV}} = 0, \\
\psi^*_{(1)}\sigma_z\varphi_{\text{III}} = 0; & \psi^*_{(1)}\sigma_z\varphi_{\text{IV}} = \dfrac{q}{\sqrt{\pi}}Y^2_{00}f^*_{-2}, \\
\psi^*_{(2)}\sigma_x\varphi_{\text{III}} = 0, & \psi^*_{(2)}\sigma_x\varphi_{\text{IV}} = -\dfrac{q}{\sqrt{\pi}}Y^2_{00}f^*_{-2}, \\
\psi^*_{(2)}\sigma_y\varphi_{\text{III}} = 0, & \psi^*_{(2)}\sigma_y\varphi_{\text{IV}} = i\dfrac{q}{\sqrt{\pi}}Y^2_{00}f^*_{-2}, \\
\psi^*_{(2)}\sigma_z\varphi_{\text{III}} = \dfrac{q}{\sqrt{\pi}}Y^2_{00}f^*_{-2}; & \psi^*_{(2)}\sigma_z\varphi_{\text{IV}} = 0.
\end{array}\right\} \quad (\text{A}.34)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\psi^*_{(3)}\sigma_x\varphi_{\text{I}} = -\dfrac{q}{\sqrt{\pi}}Y^2_{00}g^*_0, & \psi^*_{(3)}\sigma_x\varphi_{\text{II}} = 0, \\
\psi^*_{(3)}\sigma_y\varphi_{\text{I}} = -i\dfrac{q}{\sqrt{\pi}}Y^2_{00}g^*_0, & \psi^*_{(3)}\sigma_y\varphi_{\text{II}} = 0, \\
\psi^*_{(3)}\sigma_z\varphi_{\text{I}} = 0; & \psi^*_{(3)}\sigma_z\varphi_{\text{II}} = -\dfrac{q}{\sqrt{\pi}}Y^2_{00}g^*_0; \\
\psi^*_{(4)}\sigma_x\varphi_{\text{I}} = 0, & \psi^*_{(4)}\sigma_x\varphi_{\text{II}} = \dfrac{q}{\sqrt{\pi}}Y^2_{00}g^*_0, \\
\psi^*_{(4)}\sigma_y\varphi_{\text{I}} = 0, & \psi^*_{(4)}\sigma_y\varphi_{\text{II}} = -i\dfrac{q}{\sqrt{\pi}}Y^2_{00}g^*_0, \\
\psi^*_{(4)}\sigma_z\varphi_{\text{I}} = -\dfrac{q}{\sqrt{\pi}}Y^2_{00}g^*_0; & \psi^*_{(4)}\sigma_z\varphi_{\text{II}} = 0.
\end{array}\right\} \quad (\text{A}.35)$$

Les expressions pour T sont les mêmes que pour A, sauf que les signes sont opposés dans les formules (A.35).

Enfin les expressions $\psi^*\Omega\varphi$ pour P deviennent

$$\left.\begin{array}{l}
\psi^*_{(1)}\beta\gamma_5\varphi_{\text{II}} = -i\dfrac{q}{\sqrt{\pi}}Y^2_{00}f^*_{-2}, \\
\psi^*_{(2)}\beta\gamma_5\varphi_{\text{I}} = i\dfrac{q}{\sqrt{\pi}}Y^2_{00}f^*_{-2}, \\
\psi^*_{(3)}\beta\gamma_5\varphi_{\text{IV}} = -i\dfrac{q}{\sqrt{\pi}}Y^2_{00}g^*_0, \\
\psi^*_{(4)}\beta\gamma_5\varphi_{\text{III}} = i\dfrac{q}{\sqrt{\pi}}Y^2_{00}g^*_0.
\end{array}\right\} \quad (\text{A}.36)$$

On peut déduire maintenant les formules pour la probabilité de transition en sommant les possibilités

$$P(\varepsilon) = 2\pi G^2\frac{q^2}{\pi}Y^4_{00}\,2(|g_0|^2 + |f_{-2}|^2)|M|^2, \quad (\text{A}.37)$$

$|M|^2$ étant analogue aux éléments de matrice obtenus dans le cas de la capture K (A.25) et (A.26).

Pour obtenir la formule de Fermi on doit développer $|g_0|^2 + |f_{-2}|^2$; g_0 et f_{-2} sont données par (A.18).

On a

$$|g_0|^2 + |f_{-2}|^2 = \frac{\varepsilon}{\pi pR^2}(1+\gamma) \times \frac{(2pR)^{2\gamma}\,e^{\frac{\pi\alpha Z\varepsilon}{p}}}{\Gamma^2(2\gamma+1)}\left|\Gamma\left(\gamma + i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p}\right)\right|^2 \quad (\text{A}.38)$$

et l'on obtient

$$P(\varepsilon) = \frac{G^2}{4\pi^2}q^2|M|^2\frac{\varepsilon}{\pi pR^2}(1+\gamma) \times \frac{(2pR)^{2\gamma}\,e^{\frac{\pi\alpha Z\varepsilon}{p}}}{\Gamma^2(2\gamma+1)}\left|\Gamma\left(\gamma + i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p}\right)\right|^2 \quad (\text{A}.39)$$

ou parce que $q = \varepsilon_0 - \varepsilon$ et $p = (\varepsilon^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$,

$$\left.\begin{array}{c}
P(\varepsilon) = \dfrac{G^2}{2\pi^3}(\varepsilon^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\varepsilon(\varepsilon_0 - \varepsilon)^2|M|^2 F(Z, \varepsilon) \\
\text{(formule de Fermi)},
\end{array}\right\} \quad (\text{A}.40)$$

avec

$$F(Z, \varepsilon) = \frac{1+\gamma}{2}\frac{4}{\Gamma^2(2\gamma+1)}(2pR)^{2\gamma-2} \times e^{\frac{\pi\alpha Z\varepsilon}{p}}\left|\Gamma\left(\gamma + i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p}\right)\right|^2. \quad (\text{A}.41)$$

Manuscrit reçu le 17 novembre 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] FERMI E. — *Z. Physik*, 1934, **88**, 161.
[2] KONOPINSKI E. J. — *Rev. Mod. Physics*, 1943, **15**, 209.
[3] BROGLIE L. DE. — *De la Mécanique ondulatoire à la théorie du noyau*,, t. II, Paris, 1945.
[4] DAUDEL R., JEAN M. et LECOIN M. — *J. Phys. Radium*, 1947, **8**, 238. — DAUDEL R., JACQUES R., JEAN M., RATIER J. et BENOIST P. — *J. Phys. Radium*, 1947, **8**, 257.
[5] MARSHAK R. E. — *Phys. Rev.*, 1942, **61**, 431.
[6] MÖLLER C. — *Physik. Z. Sowjet Union*, 1937, **11**, 9. *Phys. Rev.*, 1937, **51**, 84.
[7] BETHE H. A. et BACHER R. F. — *Rev. Mod. Physics*, 1936, **8**, 82, (surtout p. 196).
[8] BETHE H. A. — *Handbuch der Physik*, Band **24/1**, Berlin 1933 (p. 301-324).
[9] ROSE M. E. — *Phys. Rev.*, 1937, **51**, 484. — HILL E. L. et LANDSHOFF R. — *Rev. Mod. Physics*, 1938, **10**, 87,
[10] NORDHEIM L. W. et YOST F. L. — *Phys. Rev.*, 1937. **51**, 942.
[11] KONOPINSKI E. J. et UHLENBECK G. E. — *Phys. Rev.*, 1941, **60**, 308.
[12] CURRAN S. C., ANGUS J. et COCKROFT A. L. — *Phil. Mag.*, 1949, **40**, 36.
[13] PRUETT J. — *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 1219.
[14] WEYL H. — *Gruppentheorie und quantenmechanik* Leipzig, 1931 (p. 178-179).
[15] BAUER E. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1933, **4**, 1.
[16] CONDON E. U. et SHORTLEY G. H. — *The theory of Atomic Spetra* Cambridge, 1935 (p. 238).
[17] GROOT DE S. R. et TOLHOEK H. A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949; **228**, 1794. *Physica* 1949, XV **10**, p. 833.
[18] COOK C. S. et LANGER L. M. — *Phys. Rev.* 1948, **74**, 241.
[19] BRADT H., GUGELOT P. C., HUBER O., MEDICUS H., PREISWERK P. et SCHERRER P., *Helv. Physica acta*, 1945, **18**, 252 et 351; 1946, **19**, 219.
[20] ALVAREZ L. — *Phys. Rev.*, 1938, **54**, 486.
[21] DEUTSCH M. — *Phys. Rev.*, 1947, **72**, 729.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 11, MARS 1950, PAGE 119.

CALCUL ET INTERPRÉTATION DE LA FONCTION POTENTIELLE DE VIBRATION DES MOLÉCULES NH_3 ET AsH_3

Par JULES DUCHESNE et IVAN OTTELET.

Département de chimie physique et Institut d'Astrophysique.
Université de Liége, Liége (Belgique).

Sommaire. — Dans ce travail, les auteurs calculent la fonction potentielle de vibration des molécules NH_3 et AsH_3. Comme les fréquences harmoniques et les dimensions de ces molécules et de leurs dérivés lourds sont bien connues, il a été possible d'obtenir une bonne précision pour les constantes de force et les couplages. Outre l'analyse des forces de déformation angulaire, on peut étudier le signe des couplages grâce à des considérations sur l'hybridation des atomes d'azote et d'arsenic et sur la nature des interactions atome-atome. A partir des régularités observées sur les couplages longueur-longueur, on a pu énoncer des règles concernant la prédiction de leur signe.

Introduction. — L'étude de la fonction potentielle qui détermine les vibrations moléculaires remonte à plus de trente ans déjà. Elle avait essentiellement conduit jusqu'en ces dernières années à la détermination des forces de valence et des forces de déformation qui caractérisent les molécules polyatomiques. La méthode s'était d'ailleurs montrée très fructueuse pour l'analyse, la classification et la prévision des fréquences fondamentales des molécules dans les spectres Raman et infrarouges. En outre, la détermination des forces de valence de certains groupements chimiques (C — H, C — O, C ≡ N, etc.) avait permis de se représenter la manière dont ils évoluent avec la nature et la position des atomes auxquels ils sont liés [1]. Toutefois, les fonctions potentielles sur lesquelles étaient basés ces résultats contenaient très souvent une approximation qui consistait à supposer nuls les coefficients des termes rectangles qui y apparaissent ou si l'on veut à négliger les forces de couplage, qui traduisent les interactions entre les liaisons chimiques elles-mêmes. Grâce à la possibilité d'évaluer dans certains cas les fréquences harmoniques avec une bonne précision [2] et grâce à des méthodes qui ont été développées par plusieurs auteurs [3], il a été souvent possible de déterminer la valeur numérique des couplages et leur signe, malgré l'indétermination résultant de l'excès des constantes par rapport aux données expérimentales. Récemment, on a analysé la signi-

fication physique du signe de certains couplages et l'on a montré ses relations avec les lois qui gouvernent les interactions entre les liaisons chimiques et entre les atomes non liés [1, 4]. Dès ce moment la connaissance des couplages avait acquis une importance plus décisive parce qu'elle conduisait directement vers un aspect essentiel des propriétés structurales des molécules polyatomiques (effets de résonance, d'hybridation et d'interaction entre atomes non liés). Dans un travail plus récent, Duchesne et Monfils [5] ont montré qu'il est possible de prédire non seulement le signe mais aussi la grandeur des couplages dans des séries de molécules à structure semblable et ils ont notamment établi que, parmi l'ensemble des facteurs qui les déterminent, l'effet d'interaction entre atome non liés joue dans le cas des couplages longueur-longueur un rôle tout à fait primordial. L'importance d'une interaction entre atomes non liés résulte également du travail de Heath et Linnett [6] relatifs aux molécules tétraédriques. C'est toutefois seulement dans le cas des molécules triatomiques qu'on a pu établir avec certitude le signe des couplages. Il était intéressant, par conséquent, d'étendre l'analyse à des molécules plus compliquées au fur et à mesure que les données expérimentales se perfectionnent. Cette possibilité vient d'être fournie grâce aux données nouvelles relatives aux molécules NH_3 et AsH_3. On sait que les fréquences qu'il faut utiliser pour déterminer les forces de liaison ne sont pas les fréquences observées mais en fait les fréquences fictives qui correspondraient à des vibrations parfaitement harmoniques. En utilisant les fréquences observées, on peut, en effet, commettre dans la détermination des forces de liaison des molécules légères une erreur qui s'élève à plusieurs pour cent et qui peut mettre en doute la valeur des résultats obtenus pour les couplages, qui sont eux-mêmes petits par rapport aux forces principales de valence. Assez rares toutefois sont les cas où l'on a pu disposer des fréquences harmoniques pour effectuer le calcul. L'un des avantages des molécules dont nous proposons l'étude est justement que le calcul des fréquences harmoniques a pu y être effectué [2, 7]. Ainsi on peut s'attendre à une bonne précision dans la détermination des couplages. Il est à noter ici que l'indétermination résultant de l'excès des paramètres à déterminer par rapport aux fréquences dont on dispose est supprimée grâce à la connaissance des fréquences isotopiques ND_3 et AsD_3. D'un autre côté, l'état de l'atome d'azote et de l'atome d'arsenic de ces molécules semble être différent et cela se traduit par le fait que pour NH_3, l'angle H — N — H est égal à 107°, tandis que pour AsH_3, l'angle H — As — H est égal seulement à 90°. D'après la théorie des valences dirigées développée d'abord par Pauling [8] et complétée tout récemment par Coulson [9], cela indiquerait que, dans NH_3, les liaisons NH sont formées au moyen d'orbitales du type *sp* tandis que dans la molécule AsH_3, les orbitales émanant de l'arsenic auraient un caractère *p* pur. Dans ces molécules, tout effet de résonance est absent. Cela veut donc dire que parmi les trois facteurs cités qui contribuent au couplage longueur-longueur, il n'en est que deux (hybridation et interaction entre atomes non liés) qui peuvent intervenir pour NH_3 et il n'en est qu'un (interaction entre atomes non liés) qui peut intervenir pour AsH_3. C'est là un second caractère favorable de l'étude de ces molécules où les trois facteurs qui interviennent généralement simultanément peuvent être dissociés, au moins en partie. C'est pourquoi elles présentent une grande importance pour l'analyse et le développement du problème de l'interprétation physique des couplages.

Calcul de la fonction potentielle la plus générale pour la molécule NH_3. — L'étude des spectres infrarouge et Raman a montré que cette molécule est de type C_{3v}, c'est-à-dire présente une structure pyramidale régulière. L'analyse de la structure fine des bandes a conduit aux résultats ci-après pour les distances interatomiques et les angles entre les liaisons [2].

θ, angle H — N — H = 107°03'; β, angle entre une liaison NH et l'axe de symétrie de la pyramide = 68°12'; α, angle entre l'axe de symétrie et la hauteur d'une des faces = 51°21'; l, distance N — H = 1,014 Å; distance H — H = 1,631 Å.

Si l'on adopte une fonction potentielle tout à fait générale du type

$$\begin{aligned}2V &= f_1 \Sigma \Delta l_i^2 + f_2 \Sigma \Delta l_i \Delta l_j \\ &+ g_2 l^2 \Sigma \Delta\theta_{ij}^2 + g_4 l^2 \Sigma \Delta\theta_{ij} \Delta\theta_{ik} \\ &+ g_5 l \Sigma \Delta l_i \Delta\theta_{jk} + g_6 l \Sigma [\Delta\theta_{ij} + \Delta\theta_{ik}] \Delta l_i,\end{aligned}$$

où Δl_i, $\Delta\theta_{ij}$ sont les variations des distances NH et des angles H — N — H à partir de leur position d'équilibre, on a, d'après les travaux de de Hemptinne et Delfosse [10] les relations aux fréquences ci-après :

$$\left.\begin{aligned}\omega_1^2 + \omega_3^2 &= \left[\frac{1}{m} + \frac{3q_1^2}{M}\right] F_{12} \\ &+ 3q_0^2 \left[\frac{1}{m} + \frac{3p_1^2}{M}\right] G_{24} - \frac{3\sqrt{3}\, q_1 q_0 p_1}{M} G_{56}, \\ \omega_1^2 \omega_3^2 &= \frac{9q_0^2}{12\, m}\left[F_{12} G_{24} - \frac{1}{4} G_{56}^2\right];\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\omega_2^2 + \omega_4^2 &= \frac{p_1^2}{4}\left[\frac{3}{\lambda'} + \frac{1}{m}\right] F'_{12} \\ &+ \left[\frac{3p_0^2 p_2^2}{\lambda'} + \frac{Q_2^2}{4m}\right] G'_{24} + \frac{3p_0 p_1 p_2}{M} G'_{56}, \\ \omega_2^2 \omega_4^2 &= \frac{9p_0^2}{4\lambda' m}\left[F'_{12} G'_{24} - \frac{1}{4} G'^2_{56}\right];\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\omega_i^2 = 0{,}5889 . 10^{-6} \nu_i^2 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Les ν_i sont les fréquences fondamentales de la

molécule exprimées en cm^{-1}; m est la masse atomique de l'hydrogène, soit 1,008 et M, celle de l'azote, soit 14,008.

$$p_0 = \sin\alpha, \qquad p_1 = \sin\beta, \qquad p_2 = \sin\frac{\theta}{2};$$

$$q_0 = \cos\alpha, \qquad q_1 = \cos\beta, \qquad q_2 = \cos\frac{\theta}{2};$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{3m} + \frac{1}{M}, \qquad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{q_0^2}{6p_0^2 m};$$

$$Q_2 = p_0 p_2 + \sqrt{3}\, q_2;$$

$$F_{12} = f_1 + f_2, \qquad G_{24} = g_2 + g_4, \qquad G_{56} = g_5 + 2g_6;$$
$$F'_{12} = 2f_1 - f_2, \qquad G'_{24} = 2g_2 - g_4, \qquad G'_{56} = g_5 - g_6,$$

Il est inutile d'insister sur la signification des constantes de force qui se comprend immédiatement en examinant la fonction potentielle. On constate que le premier groupe d'équations, ainsi d'ailleurs que le second groupe, fait apparaître trois constantes à déterminer à partir de deux fréquences. Pour résoudre complètement le problème, il a donc fallu faire usage d'une autre série d'équations qui correspondent au dérivé lourd ND_3. Puisque les constantes de la fonction potentielle ne sont pas affectées, à un très haut degré d'approximation, par une substitution isotopique, on dispose par conséquent d'un nombre suffisant d'équations pour calculer sans ambiguité les constantes de force.

Les fréquences fondamentales harmoniques utilisées pour les deux molécules NH_3 et ND_3 sont les suivantes [2] :

	Fréquences //.		Fréquences ⊥.	
	ν_1.	ν_3.	ν_2.	ν_4.
NH_3...	3539	1055	3622	1685,4
ND_3...	2524	803,4	2670	1221,6

Pour effectuer le calcul, nous avons introduit les fréquences parallèles dans les équations (1) et nous avons utilisé seulement trois équations, la quatrième étant vérifiée identiquement *a priori* parce qu'elle satisfait correctement aux rapports isotopiques

$$\frac{(\omega_1^2\,\omega_3^2)_H}{(\omega_1^2\,\omega_3^2)_D} = \frac{(\mu m)_D}{(\mu m)_H}.$$

La solution obtenue est

$$F_{12} = 7{,}244.10^5 \text{ dynes : cm},$$
$$G_{24} = 0{,}525 \quad \text{»},$$
$$G_{56} = 1{,}163 \quad \text{»},$$

Si maintenant, nous introduisons les fréquences perpendiculaires dans les relations (2), nous obtenons, dans les mêmes conditions, les résultats ci-après :

$$F'_{12} = 14{,}268.10^5 \text{ dynes : cm}.$$
$$G'_{24} = 1{,}311 \quad \text{»}$$
$$G'_{56} = -0{,}145 \quad \text{»}$$

En raison des relations qui lient les constantes de la première et de la deuxième famille, relations que nous avons données en même temps que les équations générales, nous déduisons immédiatement les valeurs qui caractérisent les forces de valence, de déformation et de couplage dans la fonction potentielle.

Ce sont

$$f_1 = 7{,}171.10^5 \text{ dynes : cm},$$
$$f_2 = 0{,}074 \quad \text{»}$$
$$g_2 = 0{,}612 \quad \text{»}$$
$$g_4 = -0{,}087 \quad \text{»}$$
$$g_5 = 0{,}291 \quad \text{»}$$
$$g_6 = 0{,}436 \quad \text{»}$$

Discussion. — La force de liaison F_{12}, égale à $7{,}244.10^5$ dynes : cm, correspond bien à une valeur qui a été fournie par de Hemptinne et Delfosse [10], à savoir : $7{,}088.10^5$ dynes : cm. La comparaison ne pourra pas se poursuivre pour les autres constantes parce que l'attribution des fréquences admises à l'époque a été modifiée depuis. La force de déformation des angles H — N — H égale à $0{,}612.10^5$ dynes : cm a une valeur s'élevant à 8,5 pour 100 environ par rapport à la force principale de valence f_1. Son importance est caractéristique des forces de déformation angulaire connues pour les autres molécules. C'est le cas notamment des dérivés halogénés du méthane [2], pour lesquels la force de déformation H — C — H est déterminée aussi par un état hybride *sp* de l'atome de carbone.

Le couplage longueur-longueur f_2 entre liaisons NH est évidemment parmi ceux qui nous intéressent le plus en relation avec la théorie des couplages mentionnée plus haut [4, 5]. Ce couplage est positif, mais très petit. Nous retrouvons ainsi pour l'ammoniaque un résultat déjà obtenu par Bak [11] dans le cas du méthane, où le couplage correspondant est également très petit.

Dans la molécule d'eau, d'autre part, on trouve un couplage longueur-longueur de signe opposé, à savoir négatif. Mais dans les deux cas, NH_3 et H_2O, l'interaction des atomes d'hydrogène doit être du même ordre de grandeur puisqu'ils sont situés approximativement à la même distance. On peut donc admettre que la contribution atome-atome au couplage est caractérisée par un signe négatif, mais que la compensation due à l'effet d'hybridation qui se traduit par une contribution positive entraîne pour NH_3 un signe positif. On a d'ailleurs montré qu'un signe négatif est parfaitement compatible avec l'existence d'une force répulsive prédominante entre les atomes non liés [5]. Dans une molécule comme C_2H_4, le couplage longueur-longueur entre liaisons adjacentes CH est également négatif. Ainsi, dans un cas où l'hybridation de l'état du carbone est élevée et de type sp^2 il n'y aurait pas de compensation.

Ici toutefois la distance entre atomes d'hydrogène est plus grande, entraînant, d'après la courbe

d'interaction de Duchesne-Monfils, une plus grande force répulsive, mais un plus petit couplage en valeur absolue que dans les autres cas. Il faudrait plutôt s'attendre, par conséquent, à observer un couplage compensé, c'est-à-dire positif. Le désaccord avec l'observation provient, soit de ce que dans l'éthylène chaque atome d'hydrogène est soumis également à l'influence du carbone non adjacent, soit de l'incertitude qui pèse encore sur le signe du couplage qui serait extrêmement faible : $-0{,}0005.10^5$ dynes : cm.

Pour HCN, il semble qu'on ait une faible force répulsive, c'est-à-dire un couplage élevé [5]. Là, par conséquent, il ne faut s'attendre à aucune compensation et c'est bien ce qu'on observe : $-0{,}30.10^5$ dynes : cm.

En résumé, l'analyse actuelle montre qu'il n'est pas du tout équivalent de représenter les interactions dans une molécule en fonction des forces s'exerçant soit entre les liaisons, soit entre les atomes. Cela veut dire en d'autres termes que les considérations sur l'hybridation et celles sur l'interaction atomique conduisent à des contributions différentes et de signes souvent opposés sur le couplage.

Si les conceptions théoriques qui nous guident sont exactes, on pourrait énoncer la règle que *dans toutes les molécules sans résonance où se présente au moins un atome d'hydrogène dans une liaison déterminée, le couplage longueur-longueur avec la liaison adjacente sera généralement négatif. Il peut cependant arriver que ce couplage devienne positif quand la force répulsive est grande et qu'en même temps l'atome central présente un état d'hybridation sp notable* (NH_3, C_2H_4). Cette nouvelle proposition ne fait que compléter une idée déjà émise par Duchesne et Monfils [5] et qui vient justement d'être énoncée aussi par Linnett et Hoare [6] d'une manière essentiellement équivalente.

Le couplage angle-angle g_4 est également petit et négatif mais la signification physique de son signe n'est pas encore complètement comprise aujourd'hui.

Le couplage longueur-angle g_6 est positif et plus important que f_2 : il est égal à $0{,}436.10^5$ dynes : cm. Dans le cas de l'eau, par exemple, le couplage correspondant est également positif et plus grand que le couplage longueur-longueur. *Ce résultat est parfaitement compatible avec la théorie générale des couplages si l'on admet que le signe négatif dû à la répulsion est compensé par l'effet positif d'hybridation, qui serait plus sensible dans le cas du couplage longueur-angle, que dans le cas du couplage longueur-longueur.* Ce fait est dû à ce qu'un changement de l'angle H—N—H modifie le rapport d'hybridation *sp*, c'est-à-dire la proportion de l'orbitale *s* intervenant dans l'hybride de résonance. Par contre, un changement de la longueur de la liaison NH n'affecte pas cette proportion. En écrivant la condition d'orthogonalité des fonctions d'onde de deux orbitales autour d'un atome, on a montré que les rapports d'hybridation ne dépendent que de l'angle formé par les liaisons et nullement de leur longueur. Il n'est donc pas du tout étonnant de trouver un changement de signe quand on passe du couplage longueur-longueur au couplage longueur-angle, contrairement à ce qu'il faudrait attendre si l'on ne considérait que l'interaction entre atomes non liés.

Le couplage g_5 traduit un effet d'interaction du même genre que g_6 mais est plus compliqué; sa signification physique précise n'est pas bien établie.

Calcul de la fonction potentielle la plus générale pour la molécule AsH_3. — Cette molécule présente également une structure pyramidale régulière. L'analyse de la structure fine de certaines bandes [7] a conduit aux résultats ci-après pour les dimensions moléculaires :

$$l,\ \text{distance As—H} = 1{,}513\ \text{Å},$$
$$\text{distance H—H} = 2{,}137\ \text{Å};$$
$$\theta = 89°50', \quad \beta = 54°37', \quad \alpha = 35°09'.$$

Les angles θ, β et α sont définis de la même façon que pour NH_3. Les fréquences harmoniques ont été déduites par Mc Conaghie et Nielsen de l'analyse de la structure fine, par la méthode de Dennison. Ces fréquences sont

	Fréquences //.		Fréquences ⊥.	
	ν_1.	ν_3.	ν_2.	ν_4.
AsH_3....	2209,2	973,3	2225,8	1012,1
AsD_3....	1571,2	696,0	1582,4	718,6

En introduisant ces valeurs dans les relations aux fréquences nous obtenons pour les constantes de force :

$$F_{12} = 2{,}846.10^5\ \text{dynes : cm},$$
$$G_{24} = 0{,}283 \quad »\ ,$$
$$G_{56} = 0{,}333 \quad »$$

pour le premier groupe.

$$F'_{12} = 5{,}788.10^5\ \text{dynes : cm},$$
$$G'_{24} = 0{,}621 \quad »\ ;$$
$$G'_{56} = -0{,}581 \quad »$$

pour le second groupe.

Nous déduisons de ces valeurs :

$$f_1 = 2{,}878.10^5\ \text{dynes : cm}.$$
$$f_2 = -0{,}032 \quad »\ .$$
$$g_2 = 0{,}301 \quad »\ .$$
$$g_4 = -0{,}018 \quad »\ ,$$
$$g_5 = -0{,}276 \quad »\ .$$
$$g_6 = 0{,}305 \quad »$$

Discussion. — La valeur de F_{12} que nous avons obtenue est comparable à celle qui a été calculée par de Hemptinne et Delfosse [10]. De même que pour NH_3, la comparaison ne peut se poursuivre pour les autres constantes de force en raison de l'imprécision des fréquences à l'époque où le travail des auteurs cités a été effectué. La force de liaison As—H caractérisée par $f_1 = 2{,}878.10^5$ dynes : cm est, comme il faut s'y attendre, beaucoup plus faible que dans le cas de NH_3.

La force de déformation g_2 est de l'ordre de 10,5 pour 100 de la force de valence f_1, c'est-à-dire un peu supérieure, relativement, à la valeur correspondante pour NH_3. *Cela est conforme à l'idée que la proportion de l'orbitale s diminue dans la formation des valences* NH *et* AsH *quand on passe de l'ammoniaque à l'arsenic.* En effet, la contribution de l'orbitale *s* à la force de déformation angulaire est nulle en raison de sa symétrie sphérique. En fait, dans l'arsenic on a exclusivement une orbitale *p* pure. Cela se traduit par un angle des valences pratiquement égal à 90°.

Le couplage longueur-longueur f_2 doit être l'objet d'une attention spéciale; il est négatif contrairement au cas de NH_3, mais il est aussi très petit. Nous avons vu que le couplage f_2 pour NH_3 résulte d'un effet différentiel des deux types de contribution, atome-atome (—) et hybridation (+), la résultante de ces deux contributions donnant une valeur légèrement positive de f_2; par contre, dans l'arsenic, la contribution positive étant nulle, le couplage a une valeur négative.

Le couplage g_4 est petit et négatif et a le même signe que dans NH_3; nous n'en dirons pas davantage à son sujet vu que sa signification physique n'est pas encore complètement comprise. Le couplage g_5 change de signe par rapport au cas de NH_3 et a une valeur assez élevée. g_6 qui est un couplage longueur-angle, est positif dans les deux cas. Ainsi nous retrouvons ce que nous avons déjà indiqué précédemment au sujet du rôle de l'hybridation sur le type du couplage. Mais ici, évidemment, vu qu'à l'équilibre il n'y a pas d'hybridation, nous avons un cas où celle-ci apparaît par déformation angulaire. *Quant à l'importance relative accrue du couplage longueur-angle par rapport au couplage longueur-longueur, il semble bien que ce soit une propriété générale des liaisons hydrogénées* (CH_4, C_2H_4, H_2O, NH_3, AsH_3).

Conclusions. — Cette analyse confirme les vues qui ont été avancées par Duchesne et Monfils sur le caractère de l'interaction entre atomes non liés. En effet, on obtient un couplage longueur-longueur affecté d'un signe négatif pour AsH_3. Comme on ne peut pas éviter l'idée d'une répulsion dominante entre atomes d'hydrogène, la seule manière de rendre compte du signe est d'adopter une fonction potentielle du type proposé par Duchesne et Monfils.

Bien que la signification exacte de certains des couplages reste encore à élucider, il n'en reste pas moins vrai que déjà les rapports établis entre structure électronique et constantes de potentiel s'avèrent fructueux en vue d'une description moléculaire plus complète. En particulier, la force de déformation g_2 a un comportement qui n'est pas du tout en désaccord avec l'idée d'hybridation de l'atome d'azote dans NH_3. Cette idée est d'ailleurs renforcée par la constatation que f_2 a un signe positif.

En outre, la première tentative de systématisation du couplage longueur-longueur, qui vient de se traduire par la loi que nous avons énoncée, semble indiquer la possibilité d'étendre peu à peu cette systématisation à d'autres groupes d'atomes et permet par conséquent de prévoir la possibilité proche de déterminer *a priori* pour une molécule quelconque, quels sont les couplages négligeables et quels sont ceux qui ne le sont pas et en même temps quel est leur signe. La solution d'un tel problème répondrait à une question fondamentale que l'on s'est posée depuis longtemps déjà sur le caractère des interactions atomiques et permettrait en même temps de prévoir avec une meilleure précision la position des raies spectrales dans le cas des molécules polyatomiques.

Manuscrit reçu le 14 octobre 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Duchesne J. — *Mém. Soc. Roy. Sc. Liège*, 1943, **11**, 429. — Cabannes J. — *Rep. on Progress in Phys.*, 1946, **10**, 378. — Linnett J. W. — *Quat. Rev. of the Chem. Soc.*, 1947, **1**, 73.

[2] Dennison D. M. — *Rev. Mod. Phys.*, 1940, **12**, 175.

[3] Manneback C. et Verleysen A. — *Ann. Soc. Sc. Brux.*, 1936, **56**, 349. — Duchesne J. — *Nature*, 1938, **142**, 256; *Physica*, La Haye, 1942, **9**, 249; Vol. Comm. V. Henri, p. 47, Liège, Desoer, 1948.

[4] Coulson C. A., Duchesne J. et Manneback C. — *Nature*, 1947, **160**, 793; Vol. Comm. V. Henri, p. 33, Liège, Desoer, 1948.

[5] Duchesne J. et Monfils A. — *J. Chem. Phys.*, 1949, **17**, 586.

[6] Heath et Linnett J. W. — *Tr. Farad. Soc.*, 1948, **44**, 878. — Linnett J. W. et Hoare M. F., *Ibid.*, 1949, **45**, 844.

[7] Mc Conaghie V. M. et Nielsen H. H. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 633.

[8] Pauling L. — The Nature of the Chemical Bond, Ithaca, New-York, 1940.

[9] Coulson C. A. — Vol. Comm. V. Henri, Liège, Desoer, 1948.

[10] Hemptinne M. de et Delfosse J. M. — *Ann. Soc. Sc. Brux.*, 1936, **56**, 373.

[11] Bak B. — *Det. Kgl. Danske Vidensk. Selskab.*, 1946, **22**, 3.

ACTION CHIMIQUE DES ONDES SONORES SUR LES FLAMMES SENSIBLES

Par Z. CARRIÈRE.
Professeur à l'Institut catholique de Toulouse.

Sommaire. — On analyse, au spectrographe, l'émission lumineuse d'une flamme stratifiée par une onde sonore de fréquence 1370. Normale à l'image réelle des franges de sensibilité qu'on projette sur elle (à travers un disque stroboscopique), la fente rectiligne du spectrographe est divisée en segments égaux entre eux et à l'interfrange. Dans les bandes spectrales correspondantes, l'intensité fixée varie d'un maximum à un minimum, au moins pour l'émission caractéristique des bandes de Swan.

Produits de dissociation du carbure (gaz d'éclairage), les molécules de carbone auxquelles on attribue ces radiations ont donc, dans la flamme, sous l'action des ondes sonores, des lieux de densité maximum et minimum.

Amorcée dans la plage sensible, l'activation spécifique accélératrice de la dissociation se continue et se poursuit jusque dans les couches supérieures de la flamme.

1. **Dynamique chimique des flammes sensibles.** — La sensibilité des flammes au son est décelée par le système de franges à peu près équidistantes qu'y découvre l'œil armé du stroboscope.

Le long d'une normale commune à plusieurs franges, l'œil perçoit une variation périodique de l'émission lumineuse, variation qui peut être d'intensité, de couleur, ou de l'une et l'autre espèce. La présente étude a la prétention de déterminer la nature de cette variation pour les divers points d'une flamme stratifiée par le son.

La variation de l'intensité peut s'expliquer par une variation de la température seule, mais non la variation de la couleur dont la cause est la variation de la nature ou au moins de l'état énergétique des centres émetteurs présents dans la flamme. Que l'œil perçoive des variations de couleur le long de la normale aux franges prouve que, à un instant donné, certains centres apparaissent et disparaissent périodiquement, les lieux de l'un formant un système de franges partielles dont la juxtaposition pour tous les centres émetteurs présents forme l'ensemble du système de franges total.

Il relève de la spectrographie de confirmer ces déductions et, les ayant confirmées énergétiquement, de déterminer la nature des centres émetteurs dont le son est apte à moduler l'émission, sans oublier de fixer, si possible, les conditions d'efficacité de cette modulation.

2. **Flamme sensible.** — J'alimente la flamme à stratifier au gaz d'éclairage tel qu'il est fourni par la distribution urbaine de Toulouse. On sait que Toulouse reçoit par pipe-line, de Saint-Marcet, du gaz naturel constitué presque exclusivement par du méthane. Mais ce méthane n'arrive aux consommateurs que par l'intermédiaire de l'usine à gaz où il est dissocié, combiné, additionné et totalement transformé. Pratiquement, au laboratoire, sa composition est très voisine de celle qu'assignent les traités classiques de Chimie au gaz dit d'éclairage. Détail caractéristique ; les becs bunsen qui, alimentés au gaz naturel s'éteignaient dès qu'on voulait augmenter leur débit calorifique, supportent actuellement, à Toulouse, les plus grandes vitesses d'écoulement. Avantage très précieux pour des flammes dont la sensibilité, au moins pour les fréquences un peu élevées, demandent de grandes vitesses d'écoulement. D'autre part, les 16 à 18 cm de pression dont dispose généralement le laboratoire sont une réserve appréciable par rapport aux 7 à 8 cm habituellement exigés pour des expériences durant 4 h ou davantage.

La fréquence utilisée étant 1370, l'ajutage à flamme est une fente réduite (1). La flamme est étalée en queue d'aronde dans un plan parallèle à la petite dimension de la fente. Elle est frappée normalement par l'onde sonore issue d'un haut-parleur dont le plan de base du pavillon est distant de 12 cm, parallèle lui aussi à la petite dimension de la fente.

3. **Alternateur stroboscope.** — La solidarité du stroboscope et de la source sonore étant la condition indispensable des mesures projetées, j'ai eu recours au moteur asynchrone synchronisé portant à l'une des extrémités de son axe le disque stroboscopique, et à l'autre extrémité un rotor d'alternateur.

Ce rotor est un simple pignon d'acier de 10 cm de diamètre, 5 mm d'épaisseur, dont les 57 dents passent dans l'entrefer à peine plus large d'un électro

(1) Z. CARRIÈRE, *Revue d'acoustique*, 1936, p. 115.

feuilleté sur lequel un enroulement secondaire transmet le courant alternatif induit à un amplificateur, puis à un haut-parleur.

Le disque stroboscopique de 33 cm de diamètre, porte également 57 fentes de 1 mm de largeur. Il est calé sur l'axe par une simple vis qui permet de faire varier la phase relative du disque et de l'alternateur, et aussi de supprimer ce disque pour les réglages préliminaires indispensables.

4. **Spectrographie.** — La figure 1 montre, en

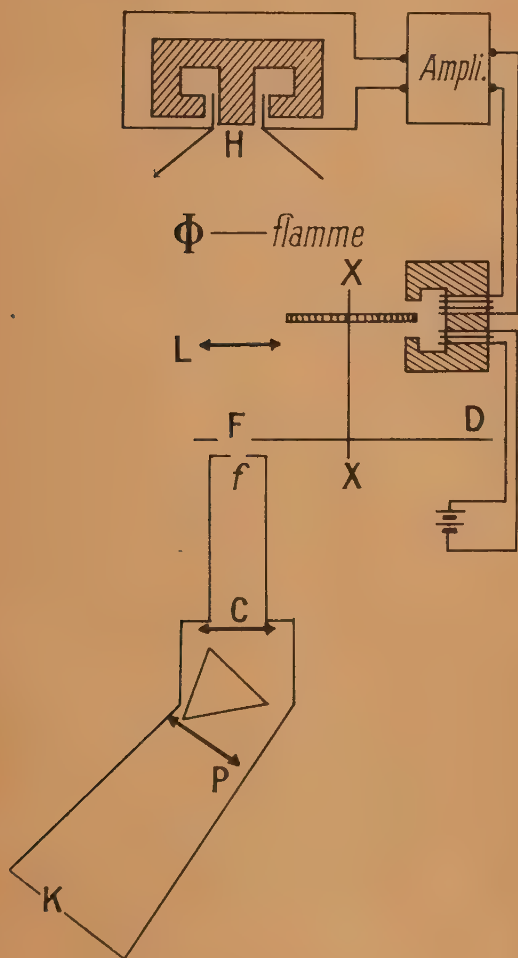


Fig. 1.

projection horizontale, l'ensemble du spectrographe (à prisme) et des appareils associés. La flamme est représentée par le segment Φ.

La fente *f* du collimateur est verticale, son milieu est dans le plan de la figure qui contient à la fois l'axe *xx* du moteur et les axes optiques des lentilles P, L et C (cesdeux derniers confondus), et encore, sensiblement au moins, l'axe du haut-parleur H. La hauteur de l'ajutage à flamme est arbitraire, réglée par l'une des vis d'un chariot de tour dont l'autre commande la translation horizontale normale à *xx*. On peut ainsi amener sur l'axe optique commun aux lentilles L et C n'importe quel point de la flamme et analyser au spectrographe les radiations émises normalement à la nappe incandescente par ce point et par les points voisins.

Un point très important du réglage est la mise en coïncidence des axes des lentilles L et C; on la réalise au moyen d'une source ponctuelle que L projette sur le milieu de la fente *f* (disque D enlevé); on choisit la position de L pour laquelle l'œil placé en K voit la section du prisme uniformément illuminée. Il y a avantage à rendre solidaire du spectrographe la lentille L une fois bien réglée. La source ponctuelle est aisément fournie par un fil fin de platine horizontal porté à l'incandescence dans la flamme.

5. **Photographie des franges.** — La figure 1 représente le disque passant à quelques distances de la fente *f* qu'il devrait normalement approcher le plus possible. Un intervalle de 20 mm a été réservé pour y loger un châssis photographique destiné à fixer l'image de la flamme barrée par ses franges de sensibilité.

Ce cliché est indispensable pour mener à bonne fin l'étude proposée. Il ne suffit pas de constater une action des ondes sonores sur la flamme, il faut encore vérifier que cette action a bien la périodicité caractéristique des franges et, si possible, trouver une explication des localisations constatées.

Pour cette vérification et cette explication d'ailleurs, ce n'est pas des franges seules qu'on demande le cliché; il faut encore fixer les points de ce cliché qui sont en regard de la fente *f* et qui, seuls, sont sources effectives du spectre à étudier. J'obtiens le tout par une double pose, dont la première est effectuée normalement sur la face sensible tournée vers Φ, disque D en rotation, la seconde en présentant en K une lumière blanche quelconque qui impressionne la face arrière du film à travers la fente *f* et une fenêtre convenable pratiquée à l'avance dans la paroi arrière du châssis. On peut se dispenser de faire construire un châssis à double volet si l'on s'astreint à transporter le châssis chargé sous un voile noir jusqu'à sa mise en position devant *f* où l'obscurité est évidemment à assurer (un voile en K sert d'obturateur pour la seconde pose).

La figure 2 à gauche représente la flamme barrée de son système de franges (courbées vers le bas) et coupée par un segment rectiligne vertical très blanc. Ce segment bien limité est la trace du faisceau admis normalement par la fente *f*; donc, également la trace du faisceau de même direction envoyé sur la

même fente par la flamme Φ. Pratiquement, je l'identifie avec la flamme elle-même.

Il est bien connu que le stroboscope déforme les franges; déformation qu'on peut définir par une altération de leur courbure et une modification de l'interfrange. Les franges *immobilisées* ne sont pas la trace exacte des franges *instantanées*. L'immobilisation apparente résulte d'une sélection opérée par le stroboscope sur les franges instantanées, évoluant au cours d'un intervalle de temps non très petit variable d'ailleurs avec la hauteur au-dessus ou au-dessous du plan de la figure 1 et l'inclinaison relative des franges instantanées et des fentes F en mouvement.



Fig. 2.

L'interfrange n'est correctement reproduit qu'au voisinage du plan de la figure 1 et pour des franges horizontales près de ce plan.

La méthode que je préconise n'a pas à tenir compte de ces déformations. Elle opère, non pas sur les franges réelles instantanées projetées par Φ dans le plan de la fente *f*, mais sur les franges immobilisées par le disque sur le même plan. Le spectrographe reçoit le faisceau immobilisé. Le cliché photographique a pour rôle de repérer les maxima et les minima d'éclairement localisés sur la fente par le disque immobilisant.

5. **Sens de rotation du stroboscope.** — L'image réelle des franges descend dans le plan de *f*. Si les fentes F montent dans leur plan propre très voisin, l'action sélective du stroboscope est mesurée par la somme des vitesses des deux mouvements; la durée d'admission d'un maximum d'éclairement est mesurée par l'inverse de cette somme.

La somme doit être remplacée par la différence si l'on change le sens de rotation du disque; la durée d'admission peut alors être assez grande pour annuler l'effet stroboscopique.

La vitesse d'ascension des franges est voisine de 7 m : s, celle du milieu d'une fente de 21,7 m : s. La somme des vitesses est à peu près le double de leur différence. Le cliché de gauche de la figure 2 où agit cette différence est pratiquement inutilisable.

J'ai choisi le sens de rotation donnant l'effet sélectif maximum (cliché de droite de la figure 2) : corrélativement, les durées de pose pour la spectrographie ont dû être augmentées; 2 mn étaient nécessaires pour fixer les franges (moins de 1 s pour fixer la trace de la fente) sur le film Kodak super XX. Mais les poses au spectrographe auraient dû, avec le même film et une fente fine, dépasser 10 h. Durée abaissée à 8 h par élargissement de la fente jusqu'à 1 mm quand il a été constaté que le spectre obtenu, exempt de raies, ne contenait que des bandes relativement larges faciles à isoler, impossibles d'ailleurs à séparer en leurs constituants faute de dispersion suffisante.

Durée abaissée à nouveau à 4 h environ par la prélumination.

6. **Prélumination.** — Il est bien connu que, pour amener un grain d'argent à l'état énergétique à partir duquel il devient développable (appelé seuil de sensibilité), un minimum de lumination $I\tau$ (I intensité lumineuse, τ durée de pose) est requis, au-dessous duquel le film se conduit comme vierge et non impressionné. D'où l'idée venue à nombre de chercheurs de fournir artificiellement et antérieurement à toute pose, sous forme de voile uniforme exactement dosé, ce minimum de lumination après lequel la plus faible lumination fournira une impression développable.

On a d'ailleurs vite remarqué que ce minimum pouvait intervenir après la pose aussi bien qu'avant, la lumination surajoutée portant au seuil ou au-dessus du seuil l'état des grains que la pose avait laissé au-dessous.

On a enfin multiplié les essais avec les variantes en nombre infini que fournissent les deux facteurs I et τ pour un produit à peu près constant.



Fig. 3.

Constance du produit qui n'est rien moins que démontrée, qui varie certainement avec la sensibilité nominale des films et non moins certainement avec la lumination de pose qu'ils sont destinés à recevoir.

Les résumés des travaux des laboratoires Kodak contiennent quelque bibliographie sur ce sujet et c'est là que j'ai trouvé mention d'un procédé de lumination utile *pour les longues poses*. On proposait

la prélumination à très forte intensité, donc à durée très petite. J'avais en perspective de fort longues poses. J'ai pensé de suite à une source préluminante de forte intensité et de très courte durée : l'étincelle. Le cliché (*fig.* 3) témoigne du succès obtenu. L'ensemble du film a été préluminé, sauf la bande horizontale médiane protégée par une cache pendant cette opération.

Pose au spectrographe de 4 h 30 mn sur film préluminé.

7. **Étincelle de prélumination.** — Le film Kodak super XX est exposé à 60 cm d'un éclateur à boules de 10 mm de diamètre, 2,5 mm d'écartement, reliées respectivement aux armatures extérieures d'une paire de jarres de 14 cm de diamètre, 31 cm de hauteur utile. Les armatures intérieures sont chargées, à travers des tubes à eau formant résistance, par une machine de Whimshurst isolée de ses propres capacités. La charge s'opère progressivement jusqu'à une limite de voltage décelée par l'apparition d'une aigrette sur l'extrémité arrondie d'une tige de cuivre reliée au pôle négatif de la machine, en face et sur l'axe d'un disque de cuivre de 45 mm de diamètre relié à l'autre pôle de la machine (polarité contrôlée par un tube à rayons cathodiques).

Quand l'aigrette apparaît, on court-circuite les armatures intérieures des deux jarres, ce qui déclenche l'étincelle entre les extérieures.

J'ai voulu connaître, sinon avec précision du moins comme ordre de grandeur, la durée τ de cette étincelle. Elle est certainement inférieure au 1/100 000e de seconde. En voici la preuve :

L'étincelle est projetée, après réflexion sur un miroir tournant à la vitesse de 23 t : s (moteur asynchrone synchronisé), sur un mur distant de 1,08 m du miroir. L'image réelle parcourt environ 300 m : s. Il s'agit d'estimer à l'œil nu, parallèlement à ce parcours la différence des dimensions de l'image miroir au repos, puis en mouvement. C'est possible, grâce à la persistance des impressions lumineuses intenses et brèves perçues dans la chambre noire que requiert évidemment toute prélumination.

A l'œil nu, je n'ai pas remarqué de différence appréciable dans ces dimensions qui étaient de l'ordre du centimètre. Différence très inférieure par conséquent au demi-centimètre correspondant à une durée de 1/120 000e de seconde, plus probablement de l'ordre de deux millioniémes.

J'ai pu faire ces mesures sans faire intervenir l'axe de rotation du miroir comme déclencheur de l'étincelle au moment qui convient pour en recevoir l'image en un point unique du mur. 70 cm sur le mur couvrent à peu près le dixième de la circonférence décrite par l'image. On a donc, théoriquement, en commandant l'éclatement de l'étincelle à la main, c'est-à-dire au hasard, une chance sur 10 de voir l'image projetée dans les 70 cm attentivement visés. Autrement dit, sur 10 étincelles provoquées on peut espérer en voir une; on est certain de ne pas atteindre la centaine sans en voir plusieurs (j'en ai vu effectivement 8 à 10).

Ce jeu des probabilités justifie même une tentative de fixation sur film sensible, qu'il faut prendre de 35 cm seulement, pour les deux motifs suivants. D'abord, il peut être maintenu plan sans courbure, ensuite son rôle fixateur ne peut être prolongé au delà de la dixième étincelle après laquelle doit être exposée une nouvelle longueur de film vierge. Sur film de longueur moitié moindre, les chances ont diminué de moitié, mais la centaine d'essais prévus n'exige pas plus de 3 à 4 m de film.

Mes essais sur film ont confirmé mes mesures à l'œil nu; le manque de netteté de l'étincelle source et des images correspondantes empêche seul de présenter des clichés qui, s'ils étaient nets, fourniraient une mesure très précise.

8. **Spectrogramme.** — La figure 4 en haut, reproduit le cliché de la flamme non stratifiée, pris avec une fente de 0,4 mm (de hauteur limitée). Comme échelle de longueur d'onde, est reproduit au-dessous le spectre de l'hydrogène.

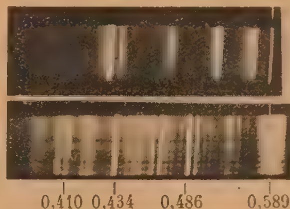


Fig. 4.

Par pose spéciale, la raie du sodium a été surajoutée au spectre de la flamme dont elle occupe l'extrême droite (très intense).

Dans le spectre propre de la flamme, on trouve six bandes plus ou moins larges, dégradées vers le violet dont les trois premières vers la droite doivent être identifiées avec les bandes de Swan, attribuées à la molécule de carbone C_2.

Les trois bandes de gauche, d'après Pearse et Gaydon (2) sont attribuables à la molécule de soufre S_2. Attribution que rend vraisemblable le traitement chimique subi par le gaz naturel à l'usine distributrice de Toulouse.

9. **Modulation du spectre par le son.** — Exacte ou erronée la détermination des centres émetteurs que je propose n'est pas l'objet principal de mon

(2) The identification of molecular spectra, London, 1941.

étude. J'ai voulu démontrer l'existence d'une modulation imposée par le son à la flamme sensible, montrer que le son augmente en certains points la densité des centres émetteurs qu'il laisse inchangée en d'autres points.

Il faut ici préciser d'abord la correspondance des points sources et des spectres linéaires qui leur correspondent.



Fig. 5.

Dans la figure 5, on remarquera d'abord l'inégalité des hauteurs du spectre, d'une part, et de la fente représentée à droite, d'autre part. Inégalité due à l'inégalité des convergences des lentilles du spectrographe, ce qui empêche de faire correspondre à chacun des points de la fente le spectre linéaire de même niveau. Cette correspondance est cependant très approchée, la différence des longueurs conjuguées étant petite; elle est rigoureuse pour le milieu de la fente seulement.

Il est évident qu'il y a correspondance effective entre les points d'intersection de la fente et des franges, d'une part, et les variations d'intensité spectrale le long de quelques bandes, d'autre part (bandes de Swan principalement).

Si l'on veut, les maxima d'intensité décelés par le film de droite sont dus principalement aux radiations de grande longueur d'onde localisées spectralement dans les bandes de Swan. Le son intensifie l'émission de ces bandes, non pas sur toute la flamme, mais *sur les franges* que définit le stroboscope.

Mais le son donne naissance à des radiations nouvelles. Au moins dans la partie supérieure du spectre, dans les spectres linéaires d'intensité maxima, toutes les radiations sont représentées, ce qui correspond à une émission de lumière blanche, à l'existence de centres émetteurs qui n'existent pas sur les spectres linéaires d'intensité minima.

Influence du son qui prolonge celle constatée sur les bandes de Swan. La lumière blanche est due à des particules de carbone solide, particules qui représentent une association de molécules plus complexes que celles décelées par des bandes de Swan, mais dérivées de celles-ci. Par une succession d'états énergétiques multiples successifs, dont d'ailleurs nous ignorons la complexité, la continuité doit régner entre les deux phénomènes; c'est le passage de l'état gazeux à l'état solide : la sublimation.

Les bandes de soufre sont peu affectées par l'onde sonore.

10. **Balayage de la flamme.** — Le dispositif adopté et les clichés obtenus dispensent d'entreprendre une discussion relative à l'influence de la phase sonore. Sur les clichés représentés sont fixés les spectres linéaires relatifs à quatre périodes au moins de l'émission lumineuse modulée par le son. Au moins quatre fois, par conséquent, toutes les phases sont représentées et fixées.

L'étude entreprise n'a donc plus, pour s'achever, qu'à se compléter par l'exploration de la flamme pour en fixer les caractéristiques locales particulières et permettre l'ébauche d'une explication des variations enregistrées.

Déjà sur la figure 5, se remarque la décroissance de haut en bas des maxima spectraux, à peine visibles sur le spectre linéaire maximum inférieur et sur ce spectre localisés presque exclusivement sur la bande d'extrême droite.



Fig. 6.

Le cliché inférieur de la figure 6 confirme cette propriété reconnue sur maints autres clichés.

L'influence sonore croît avec la hauteur de la masse gazeuse en combustion, hauteur mesurée au-dessus de la fente d'écoulement. On peut dire aussi qu'elle croît avec la durée d'action de l'onde sonore.

Dans le cliché supérieur de la figure 6, la fente est éclairée par l'extrémité supérieure de la flamme.

Corrélativement, la modulation des bandes spectrales est fort nette pour les deux franges les plus élevées coupées par la fente.

11. Action chimique des ondes sonores. — On ne peut admettre pour des ondes qui frappent normalement un obstacle plan une localisation sélective de leur action mécanique en certains points de l'obstacle. Uniformité du champ et sélectivité de l'action s'excluent.

La sélectivité mise en évidence par l'étude actuelle ne peut provenir que de la flamme, qu'il ne faut plus considérer par conséquent comme un gaz inerte, mais comme un gaz formé d'assises de nature chimique spéciale. En particulier, l'état chimique du gaz localisé sur les franges différera de l'état chimique du gaz localisé dans les interfranges. A la même action mécanique d'une onde sonore pourront alors correspondre deux actions chimiques différentes, deux produits chimiques différents; à une durée plus longue de l'action sonore des états énergétiques plus différenciés.

L'expérience peut s'interpréter de la manière suivante. Il existe, au bas des flammes stratifiées par le son, une plage restreinte sensible (caractérisée par un gradient maximum de vitesse d'écoulement (gradient mesuré suivant la normale à la nappe), plage limitée toujours privée de franges. *C'est sur sa frontière supérieure que naissent toutes les franges*, l'une après l'autre, se succédant et se poursuivant vers le haut en conservant entre elles l'écartement reçu à cette frontière. Une frange naissante est la résultante de l'action du champ sonore uniforme *sur la plage sensible entière pendant une période*. Résultante ou intégrale complexe, explicable par les dimensions restreintes de la plage sensible, caractérisée d'ailleurs par une phase déterminée relativement au vecteur champ sonore à *l'instant où elle naît*.

Nées à la frontière supérieure de la plage sensible, les franges montent avec la vitesse propre d'écoulement du gaz. On admettait jusqu'ici qu'elles montent sans altération autre que celle produite par la combustion qui se poursuivrait en air calme. L'étude présente montre que la combustion est compliquée *de l'action sonore qui se continue et s'amplifie à mesure qu'augmente le temps et le parcours*.

J'appelle la complication activation. Le spectre de la flamme hors champ sonore contenant surtout des bandes de Swan, la combustion ordinaire peut être caractérisée par ces bandes; tout agent susceptible d'intensifier ces bandes est un activant de la combustion.

L'activation commence dans la zone sensible ou au moins à la frontière supérieure de cette zone. Elle est limitée dans le temps et dans l'espace à la seule bande dénommée frange, séparée des franges voisines nées ou à naître par la bande dénommée interfrange où n'existe aucune activation initiale.

L'activation ne peut être reçue que dans la zone sensible, elle y est reçue comme une amorce d'une évolution plus ou moins longue sous l'action du champ sonore générateur. A mesure que la bande activée s'élève, les produits de la combustion activée s'accumulent, la densité des émetteurs des bandes de Swan augmente, ce qui explique bien et l'existence des maxima spectraux de la figure 5 et la croissance vers le haut des intensités de ces maxima.

Le son est sans action sur les bandes qui n'ont pas été amorcées dans la zone sensible et qui constituent les interfranges.

Il revient au même de dire que le son active les bandes déjà amorcées ou bien qu'il déplace dans la flamme les centres émetteurs pour sélectivement les accumuler au maximum sur ce que nous appelons les franges. L'action sélective de l'onde non sélective ne peut s'expliquer que par les propriétés localisées de la flamme soumise à l'expérimentation.

12. Insuccès antérieurs. — Avant de réaliser par la méthode indiquée, l'étude précédente, j'ai tenté (sans succès) de la mener à bout par d'autres méthodes.

J'ai d'abord expérimenté sur la fréquence 100 que permet aisément d'obtenir le secteur d'éclairage. Comme stroboscope j'utilisais la lame vibrante accordée à la fréquence 50 depuis longtemps en service dans mon laboratoire (3). Les expériences étaient fort pénibles, parleur et stroboscope exigeant toutes les 20 mn un repos d'égale durée.

Une cause d'insuccès est celle que j'analyse au paragraphe 5. L'écran oscillant à fente fine horizontale joue son rôle de stroboscope avec une vitesse alternativement de même signe que la vitesse des franges, puis de signe contraire. Et les vitesses linéaires de la fente écran d'une part, des franges, d'autre part, étaient du même ordre (4 m environ) Pendant la moitié de la pose effective, la flamme agissait donc à peu près comme sous traite au champ sonore.

Que l'écran vibrant puisse jouer le rôle de stroboscope pour l'observation visuelle prouve seulement que l'œil est beaucoup plus sensible que la plaque photographique.

Attribuant mon insuccès à un défaut de fréquence, j'ai entrepris un montage pour la fréquence 550 fournie par un tuyau sonore. Comme stroboscope synchrone j'employais un miroir collé sur la membrane d'une capsule manométrique reliée par un caoutchouc au nœud médian du tuyau.

(3) Z. CARRIÈRE, *Journ. Phys.*, 1928, p. 190.

Je devais projeter sur la fente du spectrographe l'image *d'un point déterminé* de la flamme, le chemin de projection touchant le miroir. Comprenant la nécessité de définir exactement le point soumis à l'expérimentation je faisais une première projection de la flamme sur un écran percé d'un très petit trou dont une seconde lentille formait l'image quasi ponctuelle dans le plan de la fente spectrographique, après réflexion sur le miroir. J'orientais le miroir de manière que cette image quasi ponctuelle oscillante parcourut exactement la fente du spectrographe. Aux deux extrémités de cette oscillation correspondait à la fois et une pose relativement longue et deux phases opposées de l'émission envoyée par la flamme à travers le petit trou de l'écran intermédiaire. J'espérais obtenir, pour ces deux extrémités, des spectres linéaires différents.

Je n'ai rien obtenu du tout, les intensités étant fort réduites par le système optique complexe.

La méthode développée dans les pages précédentes a sur celles de ces tentatives, sinon l'avantage de la brièveté, au moins le mérite de fournir, sur un seul cliché, les variations correspondant à une période entière du champ sonore et cela pour 4 ou 5 p spatiales consécutives.

Manuscrit reçu le 9 décembre 1949.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 11, MARS 1950, PAGE 130.

BRUIT DE FOND DE SEMI-CONDUCTEURS. II.

Par H. F. MATARÉ.
Laboratoire Cie F. et S. Westinghouse.

Sommaire. — Comme base de calcul dans le cas dynamique, on établit une formule pour le facteur de bruit en considérant le semi-conducteur en totalité. La simplicité de ladite loi et la possibilité de représenter sur cette base le bruit plus élevé à des tensions de polarisation plus fortes permettent une extension de la théorie aux différents cas d'emplois des semi-conducteurs, entre autres comme organes de mélange de fréquences. On procède donc à un développement analytique du cas dynamique et au calcul du bruit effectif de la diode semi-conductrice en mélangeur. Des calculs analogues donnent le bruit effectif et la sensibilité (puissance de bruit divisée par la largeur de bande effective; rapport signal-bruit = 1) de montages triodes semi-conductrices ou cristal à trois électrodes (transistrons).

1. **Loi analytique générale pour le bruit élevé.** — Le comportement de notre formule (V. [18] Ire Partie et [25]) montre qu'il n'est pas permis de remplacer la couche d'arrêt en état « soufflé » (fort courant) par un court-circuit froid.

L'équilibre thermodynamique n'étant pas établi dans le cas du semi-conducteur parcouru par un courant, on doit prendre comme base pour les courants forts la propriété spécifique des diodes (p croissant). D'après la théorie de Schottky on a même en état « soufflé » un saut du potentiel à l'électrode métallique. Seulement la longueur de la couche de charge d'espace constante diminue de plus en plus. Puisque le détecteur est rarement utilisé dans la partie $R_d \approx R_p$ et puisque ses propriétés physiques sont spécialement intéressantes jusqu'à 1 V de tension d'exploration (la tension d'un oscillateur en cas de mélange de fréquences est d'ordre de 1/10e de volt) on peut utiliser le schéma substitutif où l'on pose $R_p \ll R_q$. On a alors

$$R_d = \frac{R_q R_i}{R_q + R_i}, \qquad \text{où} \quad R_i = \frac{1}{S} = \frac{\partial U}{\partial i_1}.$$

On ne regarde maintenant que cette résistance comme source de bruit puisque à proximité du point zéro on a $R_d \approx R_q$ et $R_i > R_q$ et dans cette partie le bruit thermique est prédominant. En explorant plus loin ($R_i \ll R_q$) le bruit de grenaille est toutefois prédominant.

On établit alors la loi pour p en comparant la somme des injections de bruit thermique et de grenaille avec le bruit à température élevée (p-fois) de la résistance de travail.

Nous comparons donc

$$\sum \overline{i^2} = 4 k T_0 \frac{1}{R_d} \int \mathrm{d}f + 2 e |\mathcal{I}| F^2 \int \mathrm{d}f,$$

avec

$$\overline{i^2} = 4 k p T_0 \frac{1}{R_d} \int \mathrm{d}f,$$

ce qui mène à la formule

$$p = 1 + 20 |I| R_d F^2. \tag{1.1}$$

Ainsi qu'on l'a déjà remarqué, le facteur F^2 peut être considéré comme mesure de la charge d'espace. D'après ce facteur il est possible de trouver

quatre parties ou zones essentielles du facteur de bruit :

A proximité du point zéro, c'est-à-dire pour des tensions de polarisation de $0 \rightarrow 10^{-2}$V on a

$$F^2 = 0.$$

donc $p = 1$ ou égal à une constante, laquelle varie d'ailleurs quelque peu selon la forme de contact réalisée. En général

$$p = A \qquad \text{pour} \quad A \approx 1.$$

La deuxième partie, très limitée, est celle correspondant à une charge d'espace encore efficace soit

$$F^2 < 1.$$

d'où

$$p = A + 20|I|R_i F^2.$$

Cette zone correspond à des tensions comprises entre 10^{-2}V et 3.10^{-2}V, environ.

La troisième partie est celle pour laquelle

$$F^2 = 1,$$

c'est-à-dire la zone de saturation où

$$p = A + 20|I|R_i,$$

elle s'étend de 3.10^{-2} à 3.10^{-1}V et est, en général, très étendue.

Enfin la quatrième partie, où le bruit est très élevé par réflexion aux points d'impureté avec

$$F^2 \approx U^{0,6},$$

commence aux environs de 300mV.

On a présenté, à la figure 1, quelques valeurs de facteur de bruit mesuré sur des cristaux de Si, Fe S et Ge.

Pour certains cristaux, les lois énoncées ne constituent qu'une approximation assez grossière, c'est-à-dire que les valeurs de tension ne sont pas absolument rigoureuses. On trouve, par exemple, du germanium pour lequel le facteur $p = 1$, jusqu'à ce qu'on a indiqué comme correspondant à la deuxième zone, pour laquelle $F^2 < 1$. De même, certains détecteurs à cristal de silicium laissent apparaître p plus élevé qu'il n'est indiqué par la pente de la courbe correspondante (*fig.* 1).

Toutefois, pour la grande majorité des détecteurs à diode de cristal, la loi d'augmentation du bruit, subdivisée en quatre parties peut se concrétiser sous la forme d'ensemble

$$\left.\begin{array}{llll} a. & p = A & (A \approx 1) & (F^2 = 0); \\ b. & p = A + 20|I|R_i F^2 & & (F^2 < 1); \\ c. & p = A + 20|I|R_i & & (F^2 = 1); \\ d. & p = A + 20|I|R_i|U|^c & & (F^2 = U^c,\ c = 0,6). \end{array}\right\} \quad (1.2)$$

Puisque $R_i = \frac{\partial U}{\partial I}$, est la résistance différentielle au point de travail, on peut écrire pour les pentes correspondant au tracé de p sur feuille à double graduation logarithmique

$$\begin{array}{lll} a. & p \approx 1 & [\alpha = 0^\circ]; \\ b. & p \approx 1 + 20U.U^{-c} \approx 1 + 20U^n \left\{\begin{array}{l}(c < 1)\\(n < 1)\end{array}\right\} & [\alpha < 45^\circ]; \\ c. & p \approx 1 + 20U^1 & [\alpha = 45^\circ]; \\ d. & p \approx 1 + 20U.U^c \approx 1 + 20U^{1+c} \quad (c = 0,6) & \\ & \approx 1 + 20U^{1,6}. & \end{array}$$

La formule c donne, en général, une approximation satisfaisante si on la prend comme base de calcul étant donné, qu'en cas de mélange on ne « pilote » pas la caractéristique plus loin que 0, 1-0, 3V, d'autre part la partie pour laquelle $F^2 < 1$, est très réduite. La partie $F^2 = 0$ est, automatiquement, respectée parce que $F^2 = 0$ correspond au cas $I \approx 0$.

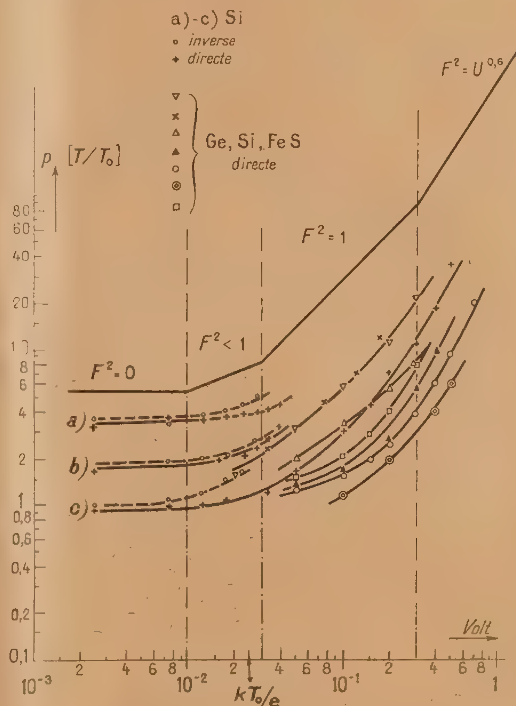


Fig. 1.

On comprend que la zone de saturation ($F^2 = 1$) est la plus étendue et soit en prévalence en rappelant qu'on détermine facilement aux bornes de la couche d'arrêt, de très faible épaisseur, de l'ordre de 10^{-5} à 10^{-6} cm, des intensités de champs électriques suffisamment élevées pour compenser le travail d'extraction entre le niveau Fermi du métal et le niveau d'énergie dans le semi-conducteur.

Il y a lieu de signaler que la littérature anglo-saxonne désigne déjà les deux parties correspondant à $F^2 < 1$ et $F^2 = 1$ par l'expression « extra bruit »

(extra noise). Cette désignation semblerait plus judicieusement applicable à la troisième zone seulement, pour laquelle $F^2 > 1$. Cette partie correspond, en effet, à la zone de bruit élevé des diodes à cathode émissive pour laquelle on trouve également une dépendance avec $U^{0,6}$ (*cf.* [7]).

On aura donc, pour cette partie

$$p = 1 + 20 \left| I \right| \frac{\partial U}{\partial I} U^{0,6}. \qquad (1.3)$$

On constate, d'après la figure 1 que cette zone débute pour une tension supérieure à 3.10^{-1} V aux bornes du cristal.

L'explication qui peut être donnée, pour le bruit élevé dans cette partie est analogue à celle déjà donnée pour les diodes à cathode émissive.

Selon les remarques de Bethe [9] on a, par exemple, cinq charges d'unité dans le cube d'une couche d'arrêt de longueur transversale 10^{-6} cm, pour laquelle on suppose une épaisseur des points d'impureté de 5.10^{-18} cm^{-3}. Ceci explique le bruit de saturation pour des tensions absolument infimes. Il est possible, d'autre part, de démontrer qu'un détecteur à contact ponctuel supporte déjà des échauffements atteignant $T = 500°K$ soit 200° C [19] pour une intensité de courant de 0,1 mA. A cette température, et pour le germanium, par exemple, on se trouve déjà dans la portion de conductibilité intrinsèque, pour laquelle la résistance spécifique commence fortement à s'abaisser. Dans cet état de densité accrue des électrons, les réflexions aux points d'impureté sont déjà notables et déterminent des courants élevés de bruit par superposition des effets de bruits.

2. **Bruit dans le cas dynamique.** — A l'aide de la loi déterminée pour p, il est maintenant facile d'établir une formule valable pour le cas dynamique. Ceci est important pour le cas où le semi-conducteur est employé en mélangeur.

Écrivant maintenant l'expression de la caractéristique sous une forme compatible à ce cas, on obtient

$$I_d = K(U_0 + U_\sim \cos \omega t)^n + \rho(U_0 + U_\sim \cos \omega t), \qquad (2.1)$$
$$I_i = \rho(-U_0 + U_\sim \cos \omega t). \qquad (2.2)$$

pour lesquelles

K, constante de la couche en [mA : V^n];
U_0, tension de polarisation en « direct »;
$U_\sim$, amplitude de la tension alternative;
n, exposant de la caractéristique;
ω, $2\pi f$ = pulsation;
ρ, $\frac{\partial I_i}{\partial U}$ = pente en « inverse ».

Dans la plupart des cas il pourra être fait usage de la formule (1.2*c*), qui donne dans le cas présent

$$p(\omega t) = A + 20 \frac{K(U_0 + U_\sim \cos \omega t)^n + \rho(U_0 + U_\sim \cos \omega t)}{Kn(U_0 + U_\sim \cos \omega t)^{n-1} + \rho} \qquad (2.3)$$

et si

$$\rho \ll S = KnU^{n-1} \quad \text{et} \quad n \approx 1;$$

$$\left.\begin{aligned} p(\omega t) &= A + \frac{20}{n}(U_0 + U_\sim \cos \omega t), \\ p(\omega t^*) &= A + 20(-U_0 + U_\sim \cos \omega t), \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

avec

ωt^* = angle de pilotage, en « inverse »,
$\theta^* = \pi - \theta$ = angle du flux d'intensité, en « inverse ».

L'intégration de (2.4) donne donc

$$\begin{aligned} p(\theta) = {} & \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{+\theta} p(\omega t)\,\mathrm{d}\omega t \\ & + \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta^*}^{+\theta^*} p(\omega t^*)\,\mathrm{d}\omega t^* \\ = {} & \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{+\theta} \left[A + \frac{20}{n}(U_0 + U_\sim \cos \omega t)\right]\mathrm{d}\omega t \\ & + \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta^*}^{+\theta^*} [A + 20(-U_0 + U_\sim \cos \omega t)]\,\mathrm{d}\omega t^* \end{aligned} \qquad (2.5)$$

ou

$$\begin{aligned} p(\theta) = {} & A + \frac{20}{\pi} U_\sim \left[\frac{n+1}{n}\sin\theta \right. \\ & \left. + \left(\pi - \frac{n+1}{n}\theta_{\text{arc}}\right)\cos\theta\right]. \end{aligned} \qquad (2.6)$$

qui est une fonction décroissante de n et dont les minima se déplacent alors vers des angles de flux d'intensité plus élevé.

La fonction p (θ) est d'importance générale puisqu'elle apparaît dans tous les calculs de courants de bruit comme dans ceux de tensions, résistances ou températures de bruit. Cette fonction (2.6) est représentée à la figure 2, par l'expression réduite

$$p'(\theta) = \frac{20}{\pi}\left[\frac{n+1}{n}\sin\theta + \left(\pi - \frac{n+1}{n}\theta_{\text{arc}}\right)\cos\theta\right]. \qquad (2.7)$$

Si l'on explore la caractéristique plus fortement dans la partie $F^2 > 1$ on doit partir de la formule (1.3). On obtient alors

$$\begin{aligned} p(\theta) = {} & \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{+\theta} \left[A + \frac{20}{n}(U_0 + U_\sim \cos \omega t)^{1+c}\right]\mathrm{d}\omega t \\ & \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta^*}^{+\theta^*} \left[A + 20(-U_0 \quad U_\sim \cos \omega t)^{1+c}\right]\mathrm{d}\omega t \end{aligned} \qquad (2.8)$$

ou

$$\begin{aligned} p(\theta) = {} & A + \frac{20}{2\pi n} U_\sim^{1,6}\int_{-\theta}^{+\theta} (\cos \omega t - \cos\theta)^{1,6}\,\mathrm{d}\omega t \\ & + \frac{20}{2\pi} U_\sim^{1,6}\int^{+\theta^*} (\cos \omega t - \cos\theta)^{1,6}\,\mathrm{d}\omega t. \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Introduisant ensuite la fonction

$$\psi_n(\theta) = \frac{1}{KU_\sim^n(1 - \cos\theta)^n} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{+\theta}(\cos \omega t - \cos\theta)^n\,\mathrm{d}\omega t}{(1 - \cos\theta)^n} \quad [20],$$

on obtient

$$p(\theta) = A + \frac{20}{n} U_{\sim}^{1,6} \psi_{1,6}(\theta) (1 - \cos\theta)^{1,6} + 20 U_{\sim}^{1,6} \psi_{1,6}(\theta^*) (1 - \cos\theta^*)^{1,6}, \quad (2.10)$$

fonction qui donne des valeurs plus élevées correspondant à la forte exploration du semi-conducteur.

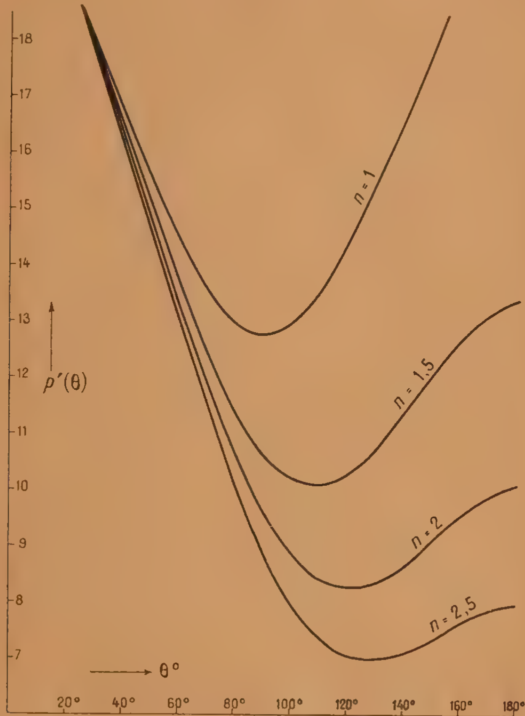


Fig. 2.

Il doit être bien entendu que les formules données ici pour le bruit dynamique ne tiennent pas compte du bruit de l'oscillateur local et se réfèrent uniquement aux organes à conductibilité asymétrique.

Comme il a été indiqué précédemment, ces formules donnent les valeurs approximatives pour la plupart des cas normaux. On trouvera, par exemple, certains organes pour lesquels on sortira des limites indiquées. Un exemple typique peut être mentionné dans le cas de mauvais contact ponctuel sur le semi-conducteur.

Ce qui apparut important et utile fut la détermination d'une base de calcul pour diverses utilisations et spécialement pour le cas de mélange et le bruit de fond de Transistrons.

3. **Bruit de fond de montages à trois électrodes; Transistrons.** — L'étude du Transistron amène à un schéma de quadripole généralisé et simplifié pour les calculs de sensibilité dans la figure 3.

Les notations sont :

I_E, courant d'émittor;
I_C, courant du collector;
R_E, résistance d'entrée;
R_c, résistance de sortie;
R_t, résistance d'interaction;
U_c et U_E, tensions respectives.

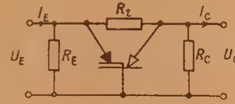


Fig. 3.

On peut déduire les équations du quadripole pour des déviations faibles

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_E &= R_{11}\,\Delta I_E + R_{12}\,\Delta I_c, \\ \Delta U_c &= R_{21}\,\Delta I_E + R_{22}\,\Delta I_c, \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

où

$$R_{11} = \left(\frac{\partial U_E}{\partial I_E}\right)_{I_c=\text{const.}} \approx 800\ [\Omega],$$

$$R_{12} = \left(\frac{\partial U_E}{\partial I_c}\right)_{I_E=\text{const.}} \approx 300\ [\Omega],$$

$$R_{21} = \left(\frac{\partial U_c}{\partial I_E}\right)_{I_c=\text{const.}} \approx 100\,000\ [\Omega],$$

$$R_{22} = \left(\frac{\partial U_c}{\partial I_c}\right)_{I_E=\text{const.}} \approx 40\,000\ [\Omega].$$

Les valeurs numériques se réfèrent au point : $I_E = 0,75$ mA ; $I_c = -2$ mA de travail d'un échantillon (*voir* [21]).

On peut représenter le transistron par des schémas de différentes formes en quadripole actif [22]. Pour le calcul des sources de bruit intérieures nous le représentons sous la forme donnée par la figure 3. La résistance d'interaction R_t que nous venons d'introduire est fortement variable et elle définit le fonctionnement du transistron en amplificateur. Un champ de caractéristiques d'un transistron (Type P. T. T. 601 Comparer [22]) est représenté par la figure 4.

Dans ce qui suit on utilise des valeurs qui représentent les moyennes des constantes mesurées de caractéristiques de transistrons. Nous introduisons la pente en puissance

$$\left[\frac{\Delta(I_c U_c)}{\Delta I_E}\right]_{U_E=\text{const.}} = \left(\frac{\Delta I_c}{\Delta I_E}\right) U_c + \left(\frac{\Delta U_c}{\Delta I_E}\right) I_c. \quad (3.2)$$

(Différentiel total de la puissance du collector).

Ensuite le facteur de puissance :

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{\Delta N_c}{\Delta N_E} = \frac{\text{puissance de sortie au collector}}{\text{puissance d'entrée à l'émittor}}, \\ P &= \frac{\Delta(I_c U_c)}{\Delta(I_E U_E)} = \frac{\Delta I_c U_c + \Delta U_c I_c}{\Delta I_E U_E + \Delta U_E I_E} \end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

ou

$$P = \frac{\Delta I_c}{\Delta I_E U_E - \Delta U_E I_E} U_c + \frac{\Delta U_c}{\Delta I_E U_E + \Delta U_E I_E} I_c, \quad (3.4)$$

cela donne pour

$$\Delta U_c = 0, \qquad U_c = \text{const.},$$

le facteur d'amplification

$$\mu = \left(\frac{\Delta I_c}{\Delta(I_E U_E)}\right)_{U_c = \text{const.}} = \frac{\Delta I_c}{\Delta I_E U_E + \Delta U_E I_E}\left[\frac{\text{mA}}{\text{mW}}\right]. \quad (3.5)$$

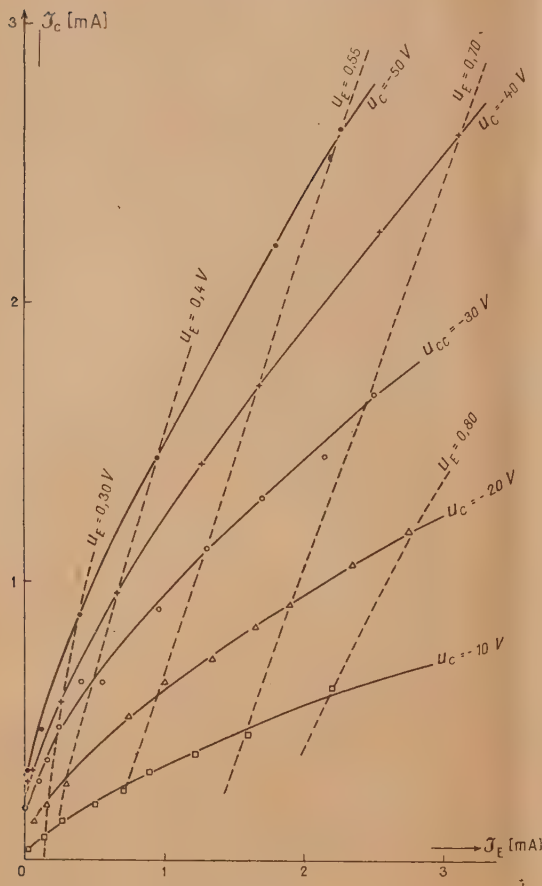


Fig. 4.

Tandis que la tension du côté collector est facile à rendre constante pour une définition de μ on ne peut pas en faire autant pour l'émittor. Ainsi la formule (3.5) est plus correcte que le facteur d'amplification $\alpha_I = \left(\frac{\partial I_c}{\partial I_E}\right)_{U_c = \text{const.}}$ mais celui-ci est utile pour les raisonnements et calculs relatifs à certaines parties des caractéristiques.

3a. **Le transistron comme organe de réception directe.** — Le schéma substitutif des sources de bruit est donné par la figure 5. Si l'on calcule le

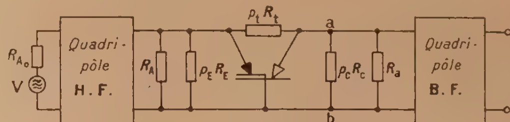


Fig. 5.

courant de court-circuit pour la section $a\,b$, on a pour le carré moyen du courant de bruit

$$\overline{i^2} = 4kT_0 \int_{f_1}^{f_2} \frac{\left(\frac{p_A}{R_A} + \frac{p_E}{R_E}\right)\left(\frac{R_A R_E}{R_A + R_E}\right)^2 + p_t R_t}{\left(\frac{R_A R_E}{R_A + R_E} + R_t\right)^2}\, \mathrm{d}f. \quad (3.6)$$

Pour la tension de bruit équivalent aux bornes $a\,b$ on doit tenir compte du bruit de R_E mais divisé par le facteur d'amplification de puissance. Avec l'abréviation

$$R_{//} = \frac{R_A R_E}{R_A + R_E},$$

on a

$$u^2_{a/b} = 4kT_0 \int_{f_1}^{f_2} \left\{ \left[\frac{\left(\frac{p_A}{R_A} + \frac{p_E}{R_E}\right) R^2_{//} - p_t R_t}{(R_{//} + R_t)^2} + \frac{p_c}{R_c P} \right] \times \left[\frac{(R_{//} + R_t) R_c}{R_{//} + R_t + R_c} \right]^2 \right\} \mathrm{d}f, \quad (3.7)$$

avec

k, constante de Boltzmann;

T_0, température absolue (ambiante; $\sim 300^\circ K$);

$p_A = \frac{T_A}{T_0}$, coefficient de température de bruit de la résistance R_A;

$p_E = \frac{T_E}{T_0}$, coefficient de température de bruit de la résistance R_E (entrée émittor);

$p_t = \frac{T_t}{T_0}$, coefficient de température de bruit de la résistance R_t (interaction);

$p_c = \frac{T_c}{T_0}$, coefficient de température de bruit de la résistance R_c (sortie collector);

R_{A_0}, résistance de la source du signal;

R_A, résistance de la source derrière le quadripole d'entrée;

R_E, résistance de l'entrée-émittor;

R_t, résistance de transfert ou d'interaction;

R_c, résistance de sortie. Côté du collector;

R_a, résistance d'entrée basse fréquence.

Pour donner une idée de l'ordre de grandeur des valeurs nous donnons ici les limites des grandeurs

mesurées pour des points de travail normaux :

$p_E = 20$ à 100;
$R_E = 100$ à 500 [Ω];
$R_t = 5.10^3$ à 50.10^3 [Ω];
$R_c = 10^4$ à 10^5 Ω];
$p_c = 50$ à 100;
$P = 10$ à 100 (10 à 20 db);
$p_t = 50$ à 200.

Puisque nous sommes également intéressés par les propriétés de l'entrée d'antenne nous introduisons le carré de la tension d'entrée du signal

$$U_E^2 = \frac{V^2}{R_{A_0} R_A} \frac{1}{\left(\frac{1}{R_t} + \frac{1}{R_E}\right)^2}, \qquad (3.8)$$

puisque $R_t \gg R_E$

Donc

$$\frac{u^2}{U_E^2} = \frac{k T_0 \Delta f}{\frac{V^2}{4 R_{A_0}}} \times \left\{ \left[p_A + p_E \frac{R_A}{R_E} + p_t R_t R_A \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_E} \right)^2 \right] \frac{R_c^2}{(R_c + R_t)^2} \right\}. \qquad (3.9)$$

Dans cette formule on a déjà tenu compte des grandeurs réelles et l'on a supprimé la partie avec p_c comme facteur puisqu'elle est divisée par le gain P. De plus il faut remarquer que $R_c > R_t \gg R_E$. En transformant (3.7) et (3.8) on a employé

$$\left(\frac{N}{\Delta f}\right)_{\text{opt}} [k T_0] = \left\{ p_A + \frac{1}{\sqrt{\frac{p_E R_E}{p_t R_t}} + 1} \left[p_E + p_t \frac{R_t}{R_E} \left(\sqrt{\frac{p_E R_E}{p_t R_t} + 1} + 1 \right)^2 \right] \right\} \frac{1}{\left(1 + \frac{R_t}{R_c}\right)^2} \qquad (3.13)$$

pour la sensibilité.

Pour une discussion de cette équation on pose

$$p_A = 1, \qquad p_t = p_E = 100, \qquad R_t \gg R_E, \qquad R_c > R_t.$$

La valeur approximative pour le maximum de sensibilité est

$$\left(\frac{N}{\Delta f}\right)_{\text{opt}} \approx 1 + p_E + 4 p_t \frac{R_t}{R_E} [k T_0]. \qquad (3.14)$$

Cela nous donne des valeurs de plusieurs milliers de $[kT_0]$ à cause du facteur $\frac{R_t}{R_E}$. Il est intéressant de tracer (3.10) en fonction de $\frac{R_A}{R_E}$ avec le rapport $\frac{R_t}{R_A}$ comme paramètre

$$\left(\frac{N}{\Delta f}\right) = 1 + p_E \frac{R_A}{R_E} + p_t \frac{R_t}{R_A} \left(1 + \frac{R_A}{R_E}\right)^2 \qquad (3.15)$$

et pour une valeur assez grande de p_E [19] (*voir fig.* 7).

On en peut tirer la conclusion qu'une transformation basse du côté de l'antenne (R_A petit) est avant tout l'équivalence entre le carré moyen du bruit total du réseau et l'introduction des valeurs moyennes du carré dans la fonction du réseau (*voir* [23]).

En définissant le rapport signal-bruit $= 1$ on tire de (3.9)

$$\frac{N}{\Delta f} = \left[p_A + p_E \frac{R_A}{R_E} + p_t R_t R_A \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_E} \right)^2 \right] \frac{R_c^2}{(R_c + R_t)^2} [k T_0], \qquad (3.10)$$

comme expression pour la puissance offerte au transistron pour un rapport signal-bruit $= 1$. Pour trouver l'optimum du couplage de l'antenne on calcule $\frac{\partial \left(\frac{N}{\Delta f}\right)}{\partial R_A}$ et en l'égalant à zéro on obtient la condition

$$R_{A_{\text{opt}}} = \frac{1}{+\sqrt{\frac{1}{R_E^2} + \frac{p_E}{p_t R_t R_E}}}. \qquad (3.11)$$

Ceci désigne un minimum pour $\frac{N}{\Delta f}$ $[k T_0]$ puisque

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{N}{\Delta f}\right)}{\partial R_A^2} = \frac{\partial (-2 R_A^{-2})}{\partial R_A} = \frac{4}{R_A^3} > 0, \qquad (3.12)$$

(3.11) nous montre que le couplage est plus serré que dans un cas normal (adaptation) puisque $\frac{1}{R_{A_{\text{opt}}}} > \frac{1}{R_E}$. Maintenant on a

nécessaire. Mais puisque $\frac{R_t}{R_E}$ est normalement de l'ordre de 10^1 à 10^2 il n'est pas utile d'aller plus loin que $\frac{R_A}{R_E} = 1$.

Il est à remarquer que R_t est en toute rigueur une fonction de R_E parce qu'elle dépend de la polarisation du côté de l'émittor.

3*b*. *Le transistron en amplificateur haute fréquence précédant un mélangeur à cristal.* — La figure 7 montre le schéma général des sources de bruit. La partie à gauche représente le transistron avec les notations connues. On voit ensuite la résistance d'entrée du mélangeur à cristal R_d et la résistance équivalente de bruit du mélangeur R_{ed}.

Si l'on veut procéder à un calcul de sensibilité au moyen de l'expression générale

$$\left(\frac{N}{\Delta f}\right) [k T_0] = \sum_{n=1}^{n} \frac{E_n}{V_p^{n-1}} \prod_{q=1}^{n} \left(1 + \frac{R_{(n-q)}}{R'_{n-q+1}}\right)^2 \qquad (3.16)$$

on doit connaître la sensibilité des étages préamplificateurs, E_n leur gain en puissance V_p et les

résistances d'entrée et de sortie R et R' des étages $(1, \ldots, n)$.

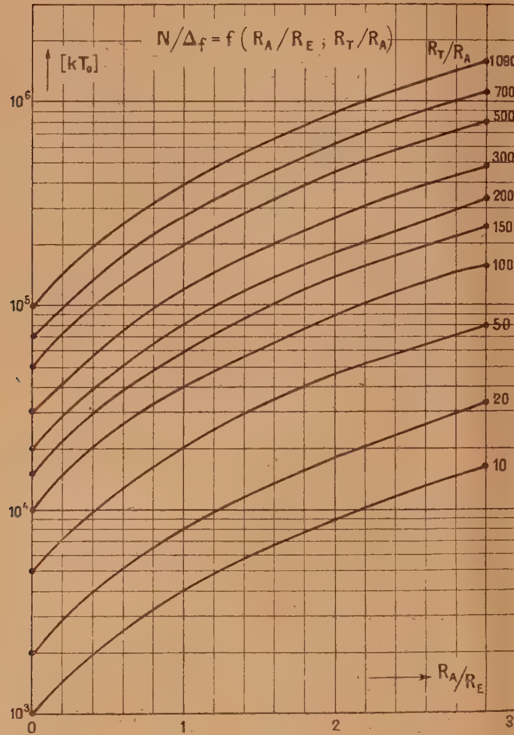


Fig. 6.

Il est plus simple d'introduire la résistance équivalente de bruit du mélangeur. Dans le cas du transistron le procédé de calcul est un peu plus complexe à cause de l'interaction entre l'entrée et la sortie. Nous utilisons ici nos équations pour le facteur p-dynamique (V.4).

Pour le courant de bruit cela donne

$$\overline{i_m^2} = 4kT_0 \int_0^\infty \mathrm{d}f \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\theta p(\omega t)\, S(\omega t)\, \mathrm{d}\omega t + \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta^*} p(\omega t^*)\, S(\omega t^*)\, \mathrm{d}\omega t^* \right\}. \quad (3.17)$$

Ceci se transforme en

$$\overline{i_m^2} = 4kT_0\,\Delta f \left\{ KU_\sim^{n-1}(1-\cos\theta)^{n-1}\psi_{n-1}(\theta) + \rho\left(2 - \frac{\theta_{\mathrm{arc}}}{\pi}\right) + 2\rho\left[KU_\sim^n(1-\cos\theta)^n\psi_n(\theta) + \frac{\rho}{\pi}U_\sim\left(\sin\theta - (\pi-\theta_{\mathrm{arc}})\cos\theta\right)\right]\right\}, \quad (3.18)$$

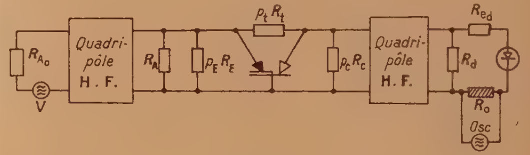


Fig. 7.

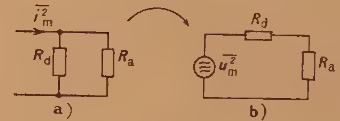


Fig. 8.

$\psi_n(\theta)$ et $\psi_{n-1}(\theta)$ sont définis par

$$\left.\begin{aligned} \psi_n(\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\theta \frac{(\cos\omega t - \cos\theta)^n}{(1-\cos\theta)^n}\,\mathrm{d}\omega t, \\ \psi_{n-1}(\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\theta \frac{(\cos\omega t - \cos\theta)^{n-1}}{(1-\cos\theta)^{n-1}}\,\mathrm{d}\omega t. \end{aligned}\right\} \quad (3.19)$$

On peut maintenant transformer le réseau schématique substitutif des sources de courants en réseau des sources de tension suivant le principe indiqué figure 8.

$$\overline{u^2} = 4kT_0\,\Delta f \left\{ KU_\sim^{n-1}(1-\cos\theta)^{n-1}\psi_{n-1}(\theta) + \rho\left(2 - \frac{\theta_{\mathrm{arc}}}{\pi}\right) + 2\rho\left[KU_\sim^n(1-\cos\theta)\psi_n(\theta) + \frac{\rho}{\pi}U_\sim\left(\sin\theta - (\pi-\theta_{\mathrm{arc}})\cos\theta\right)\right]\right\}\left(\frac{R_a R_d}{R_a + R_d}\right)^2. \quad (3.20)$$

Les accolades $\{\ldots\}$ peuvent être considérées comme $\frac{p}{R_d}$ pour le schéma (*fig.* 8 *a*) et il devient possible d'écrire

$$\bar{i} = \sqrt{4kT_0\,\Delta f\{\ldots\}R_d^2}\,\frac{1}{R_a + R_d} \quad (3.21)$$

comme courant en R_a.

L'expression sous la racine correspondant à u^2 dans le cas (*fig.* 8, *b*) la résistance équivalente de bruit R_e correspond à

$$R_e = \{\ldots\}R_d^2 \quad (3.22)$$

et puisque

$$R_d = \frac{1}{KnU_\sim^{n-1}(1-\cos\theta)^{n-1}\psi_{n-1}(\theta)}, \quad (3.23)$$

on a

$$R_e = \left\{ KU_\sim^{n-1}(1-\cos\theta)^{n-1}\psi_{n-1}(\theta) + \rho\left(2 - \frac{\theta_{\mathrm{arc}}}{\pi}\right) + 2\rho\left[KU_\sim^n(1-\cos\theta)^n\psi_n(\theta) + \frac{\rho}{\pi}U_\sim\left(\sin\theta - (\pi-\theta_{\mathrm{arc}})\cos\theta\right)\right]\right\} \frac{1}{k^2n^2U_\sim^{2(n-1)}(1-\cos\theta)^{2(n-1)}\psi_{n-1}^2(\theta)}. \quad (3.24)$$

On simplifie ici le schéma (*fig.* 7) par introduction des résistances R_d^* et R_e^* du côté gauche du quadripole haute fréquence (H. F.) (*fig.* 9). La résistance interne de l'oscillateur local peut être considérée comme petite à l'égard des autres résistances. Ainsi on peut écrire pour la tension de bruit aux bornes c/d (*fig.* 9).

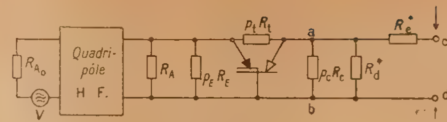


Fig. 9.

$$\overline{u}_{c/d}^2 = 4kT_0 \int_{f_1}^{f_2} \left\{ \left[\frac{\left(\frac{p_A}{R_A} + \frac{p_E}{R_E}\right) R^2 + p_t R_t}{(R + R_t)^2} + \frac{p_c}{PR_c} + \frac{1}{PR_d^*} \right] \left[\frac{(R_{//} + R_t)\frac{R_c R_d^*}{R_c + R_d^*}}{R + R_t + \frac{R_c R_d^*}{R_c + R_d^*}} \right]^2 + \frac{R_e^*}{P} \right\} df. \quad (3.25)$$

Les deux termes $\frac{p_c}{PR_c}$ et $\frac{1}{PR_d^*}$ de l'intégrant peuvent être négligés ainsi que $\frac{R_e^*}{P}$ et en introduisant comme en (3 *a*) le carré de la tension d'entrée du signal on a

$$\frac{\overline{u}_{c/d}^2}{U_E^2} = \frac{kT_0\,\Delta f}{\frac{V^2}{4R_{A_0}}} = \frac{\left[p_A + p_E \frac{R_A}{R_E} + p_t R_t R_A \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_E}\right)^2\right]\left(\frac{R_c R_d^*}{R_c + R_d^*}\right)^2}{\left(R_{//} + R_t + \frac{R_c R_d^*}{R_c + R_d^*}\right)^2} + \frac{T^* R_c}{P} R_A \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_E}\right)^2, \quad (3.26)$$

où T^* est le facteur de transformation du deuxième quadripole $T^* = \frac{R_e^*}{R_e} \approx 10$ à 30.

Discussion. — On pourrait faire une comparaison des différentes parties de cette équation à base des valeurs

$R_A \approx R_E$; $T^* \approx P$; $p_A = 1$; $\psi_n\ (0) \approx 0{,}25$;
$R_c \approx R_d^*$; $n = 2$; $0 \approx 90°$; $\psi_{n-1}(0) \approx 0{,}3$;
$R_t \gg R_A$; $K = 1$; $\rho = S_d = \frac{1}{R_d}$;
$U_- < 1$ V.

Mais pour éviter un calcul très long nous faisons usage de (3.22) en appelant que $R_e = p\,R_d$. Ici on doit introduire p-dynamique exprimé par notre formule (2.6), la figure 2 représente

$$p^*(0) = \frac{p(0) - 1}{U_-}.$$

Dans notre cas

$$p^*(0) \approx 10, \qquad p(0) \approx 18.$$

En l'introduisant au moyen de l'équation (1.2) en (3.26) on a finalement

$$\frac{N}{\Delta f} = \left\{ \frac{\left(1 + p_E + 4p_t \frac{R_t}{R_E}\right)\left(\frac{R_c}{2}\right)^2}{\left(R_t + \frac{R_c}{2}\right)^2} + \frac{p(0)}{P} R_d^* \frac{4}{R_E} \right\} [kT_0] \quad (3.27)$$

ou

$$\left(\frac{N}{\Delta f}\right) \approx 1 + p_E + 4p_t \frac{R_t}{R_E} + \frac{4p(0)}{P} \frac{R_d^*}{R_E} [kT_0]. \quad (3.28)$$

Et puisque

$$\frac{R_d^*}{R_E} \approx \frac{R_c}{R_E} \approx 10^2 - 10^3$$

et

$$\frac{R_t}{R_E} = 10^2, \qquad p_t = 10^2;$$

on voit que la troisième partie de (3.28) est décisive pour la sensibilité. Si le facteur d'amplification P est grand on a une chance de pouvoir diminuer le quatrième membre de cette équation à une fraction du troisième. En tout cas on a des valeurs de 10^3 à 10^4 $[kT_0]$.

Avec certains transistrons on peut améliorer le rapport $\frac{R_t}{R_E}$ mais normalement les deuxième et troisième membres de (3.28) sont décisifs.

3*c*. *Le transistron en mélangeur de fréquences.* — Dans la figure 10 on a branché l'oscillateur local

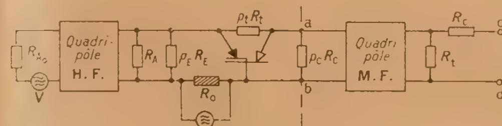


Fig. 10.

dans le circuit d'entrée du côté de l'émetteur mais on suppose que sa résistance de couplage est petite à l'égard de la résistance d'entrée du transistron. Du côté du collecteur nous supposons d'abord n'importe quelle résistance équivalente de bruit et résistance de moyenne fréquence derrière le quadripole moyenne fréquence (M. F.). Nous définissons d'abord l'efficacité de mélange du transistron

$$\eta = \frac{\frac{I_z^2}{R_z^*}}{\frac{U_h^2}{R_E}} = \frac{\text{puissance d'entrée M. F. (en } R_z^*)}{\text{puissance d'entrée H. F.}}. \quad (3.29)$$

Comme résistance d'entrée nous avons la valeur moyenne

$$\bar{R}_E = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+0} R_E \, d\omega t. \qquad (3.30)$$

En introduisant le facteur d'amplification en courant : $\alpha_I = \frac{\partial I_c}{\partial I_E}$ on obtient

$$\frac{\alpha_I}{\bar{R}_E} = \frac{I_z}{U_h} \approx \frac{I_c}{U_E} \qquad (3.31)$$

et

$$\eta = \left(\frac{\alpha_I}{\bar{R}_E}\right)^2 \left(\frac{\bar{R}_c R_z^*}{\bar{R}_c + R_z^*}\right)^2 \frac{\bar{R}_E}{R_z^*}. \qquad (3.32)$$

Il y a deux méthodes pour le calcul du bruit total aux bornes $c\,d$ (*fig.* 10). On peut commencer par le calcul de la puissance de bruit moyenne fréquence à gauche de la ligne $a\,b$ (*fig.* 10) en introduisant R_c avec le facteur de bruit

$$p_c(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{0} [1 + 20 | I_c | R_c] \, d\omega t,$$

diviser cela par l'efficacité de conversion η et ajouter le bruit total du côté H. F.

On peut aussi calculer le bruit total haute-fréquence avec inclusion de R_c avec son facteur de bruit $p_c(0)$ et ajouter la puissance de bruit aux pôles de R_z (ou R_z^* transformé). La dernière méthode est plus appropriée à nos définitions parce que nous avons défini η pour l'entrée moyenne fréquence. On a ains

$$\frac{N}{\Delta f} = \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{p_E(0)\bar{R}_E}{p_t(0)\bar{R}_t} + 1}} \left[p_E(0) + p_t(0)\frac{\bar{R}_t}{\bar{R}_E}\left(\sqrt{\frac{p_E(0)\bar{R}_E}{p_t(0)\bar{R}_t} + 1} + 1\right)^2 \right] \right\}$$
$$\times \frac{1}{\left(1 + \frac{\bar{R}_t}{\bar{R}_c}\right)^2} + \frac{4}{\eta}\left[\frac{R_c^*}{R_z^*} + \frac{1}{R_z^*}\left(\frac{R_z^* \bar{R}_c}{R_z^* + \bar{R}_c}\right)^2 \frac{1}{R_z^*}\right] [kT_0]. \qquad (3.33)$$

Le quadripôle M.F. est supposé de ne pas ajouter du bruit et de réagir comme simple transformateur

$$\frac{R_z^*}{R_z} = T^*.$$

Avec les notations

$$\frac{R_c^*}{R_z^*} = \alpha^*, \qquad \frac{R_z^*}{R_t} = \chi,$$

on a la sensibilité

$$\frac{N}{\Delta f}[kT_0] = \underbrace{1 + p_E(0) + 4p_t(\theta)\frac{\bar{R}_t}{\bar{R}_E}}_{\text{I.}}$$
$$+ \underbrace{\frac{4}{\alpha_I^2}\frac{\bar{R}_t}{\bar{R}_z^*}[\alpha^*(1 + \chi)^2 + 1]}_{\text{II.}} \qquad (3.34)$$

puisque

$$\frac{p_E(0)\bar{R}_E}{p_t(0)\bar{R}_t} \quad 1$$

avec

$$\bar{R}_t = \frac{1}{2\pi}\int_{-0}^{+0} R_t \, d\omega t,$$

$$\bar{R}_c = \frac{1}{2\pi}\int_{-0}^{+0} R_c \, d\omega t;$$

R_t et R_c valeurs momentanées;
ω, fréquence oscillatrice (angulaire).

La partie II de l'équation (3.34) est négligeable à cause du fait que $\frac{R_E}{R_z^*} \approx \frac{R_E}{\bar{R}_c} \approx 10^{-3}$. Même pour le cas d'un transistron en premier étage d'amplificateur M. F. on trouve une valeur basse en mettant

$$\chi \approx 1, \qquad \alpha^* = \frac{R_c^*}{R_z^*} = \frac{R_c^*}{\bar{R}_c} < 1.$$

La résistance équivalente $R_c = p_E R_E$ du transistron suivant n'est jamais plus grand que $\bar{R}_c$.

Ainsi on doit conclure que dans le cas d'un mélangeur à transistron les valeurs de la sensibilité sont définies par la partie d'entrée du branchement. c'est-à-dire par la partie I de l'équation (3.34). Autrement dit on ne peut s'attendre qu'à des valeurs de plusieures milliers de $[kT_0]$.

3d. Le transistron en amplificateur moyenne fréquence derrière un mélangeur à cristal. — Enfin nous posons la question du comportement du transistron comme premier étage moyenne fréquence.

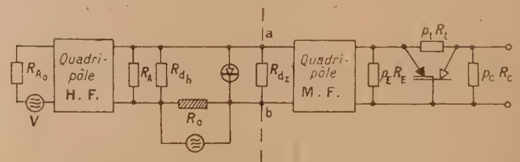


Fig. 11.

La marche du calcul est la suivante (voir *fig.* 11). Nous substitutons au mélangeur, jusqu'aux pôles $a\,b$, sa résistance équivalente de bruit à température élevée, donnée par le facteur dynamique. De cette façon on a le schéma simplifié (*fig.* 12).

Il est à noter qu'il est nécessaire de diviser le bruit M. F. par l'efficacité de mélange du détecteur à cristal. Ainsi le carré moyen du courant de court-circuit en c/d est

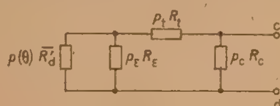


Fig. 12.

$$\bar{i}^2 = \int_{f_1}^{f_2} \frac{4kT_0 \left[\left(\frac{p(\theta)}{\bar{R}_d^*} + \frac{p_E}{R_E} \right) \left(\frac{\bar{R}_d^* R_E}{\bar{R}_d^* + R_E} \right)^2 + p_t R_t \right]}{\left(\frac{\bar{R}_d^* R_E}{\bar{R}_d^* + R_E} + R_t \right)^2} \, df \qquad (3.35)$$

et le carré moyen de la tension aux bornes c/d :

$$\bar{u}^2 = 4kT_0 \int_{f_1}^{f_2} \left\{ \left[\frac{\left(\frac{p(\theta)}{\bar{R}_d^*} + \frac{p_E}{R_E} \right) \left(\frac{\bar{R}_d^* R_E}{\bar{R}_d^* + R_E} \right)^2 + p_t R_t}{\left(\frac{\bar{R}_d^* R_E}{\bar{R}_d^* + R_E} + R_t \right)^2} + \frac{p_c}{PR_c} \right] \left[\frac{\left(\frac{\bar{R}_d^* R_E}{\bar{R}_d^* + R_E} + R_t \right) R_c}{\frac{\bar{R}_d^* R_E}{\bar{R}_d^* + R_E} + R_t + R_c} \right]^2 \right\} df. \qquad (3.36)$$

Et pour une largeur de fréquence définie on a l'expression générale pour la sensibilité

$$\frac{N}{\Delta f} [kT_0] = \frac{4}{\eta \bar{R}_c} \left\{ \frac{\left(\frac{p(\theta)}{\bar{R}_d^*} + \frac{p_E}{\bar{R}_E} \right) R_{//}^2 + \bar{p}_t \bar{R}_t}{(\bar{R}_{//} + \bar{R}_t)^2} \left[\frac{(\bar{R}_{//} + \bar{R}_t) \bar{R}_c}{\bar{R}_{//} + \bar{R}_t + \bar{R}_c} \right]^2 \right\}, \qquad (3.37)$$

où

$$R_{//} = \frac{\bar{R}_d^* \bar{R}_E}{\bar{R}_d^* + \bar{R}_E} \qquad \left(\frac{p_c}{PR_c} \text{ est supprimé} \right).$$

L'efficacité de mélange est

$$\eta = \frac{\frac{i_z^2}{R_z}}{\frac{U_h^2}{\bar{R}_h}}; \qquad (3.38)$$

U_z, tension d'entrée M. F.;
i_z, courant d'entrée M. F.;
R_z, résistance d'entrée M. F.;
U_h, tension d'entrée H. F.;
S_c, pente de conversion;
R_h, résistance d'entrée H. F.

A cause de

$$\bar{i}_z^2 = S_c^2 U_h^2,$$

il résulte

$$\eta = S_c^2 \left(\frac{R_z \bar{R}_d^*}{R_z + \bar{R}_d^*} \right)^2 \frac{\bar{R}_h}{R_z}. \qquad (3.39)$$

En écrivant

$$\frac{R_z}{\bar{R}_d^*} = \chi.$$

Et

$$\eta_{\text{opt}} = \frac{1}{4} \left(\frac{S'_c}{S'_g} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{S_c}{S_g} \right)^2, \qquad (3.40)$$

$$S_g = \frac{1}{R_h} \approx \frac{1}{\bar{R}_d} = kU_z^{n-1} S'_g,$$

on peut réduire l'équation (3.40) à

$$\eta = \left(\frac{S_c}{S_g} \right)^2 \frac{\chi}{(1+\chi)^2}. \qquad (3.41)$$

Et puisque nous tenons compte de ce que $R_t \gg R_{//}$ nous pouvons transformer (3.37) en

$$\frac{N}{\Delta f} [kT_0] \approx \frac{4}{\chi} \left(\frac{S_g}{S_c} \right)^2 (1+\chi)^2 \frac{1}{R_c} \left\{ \frac{\left(\frac{p(\theta)}{\bar{R}_d^*} + \frac{p_E}{R_E} \right) R_{//}^2 + p_t R_t}{R_t^2} \left(\frac{R_t R_c}{R_t + R_c} \right)^2 \right\}. \qquad (3.42)$$

Alors nous introduisons l'expression pour p (θ) donnée par (2.6) puisque $R_c > R_t$:

$$\frac{N}{\Delta f} [kT_0] \approx \frac{(1+\chi)^2}{\eta_{\text{opt}} \chi} \left\{ \left[1 + \frac{20}{\pi} U_z \left[\frac{n+1}{n} \sin\theta + \left(\pi - \frac{n+1}{n} \theta_{\text{arc}} \right) \cos\theta \right] \right] \frac{R_{//}^2}{\bar{R}_d^* R_c} + \frac{p_E R_{//}^2}{R_E R_c} + p_t \frac{R_t}{R_c} \right\}. \qquad (3.43)$$

Dans le cas d'un mélangeur normal avec diode à cristal nous avons, conformément à notre définition une efficacité

$$\eta_{\text{opt}} = \frac{1}{4} \frac{nKU_z^{n-1}(1+\cos\theta)^{n-1} f_{n-1}(\theta)}{nKU_z^{n-1}(1+\cos\theta)^{n-1} \psi_{n-1}(\theta) + 2}. \qquad (3.44)$$

avec les fonctions $f_{n-1}(\theta)$ et $\psi_{n-1}(\theta)$ connues. Une valeur optima pour η est de l'ordre de 0,25 (*voir* [24]).

L'équation (3.43) peut être discutée sous la forme simple

$$\frac{N}{\Delta f} [kT_0] \approx \frac{(1+\chi)^2}{\eta_{\text{opt}} \chi} \left\{ p(\theta) \frac{R_{//}^2}{\bar{R}_d^* R_c} + p_E \frac{R_{//}^2}{R_E R_c} + p_t \frac{R_t}{R_c} \right\}, \qquad (3.47)$$

en posant

$$\chi = \frac{R_z}{\bar{R}_d^*} = \frac{R_E}{\bar{R}_d^*} \approx 1$$

(c'est-à-dire le quadrupole M. F. effectue adaptation entre $\overline{R_d}$ et R_E) et $R_d^* = R_E = R_c$ on voit que

$$\frac{N}{\Delta f}[kT_0] = \frac{4}{\eta_{\text{opt}}}\left\{(p(0)+p_E)\frac{R_{//}}{R_c} + p_t\frac{R_t}{R_c}\right\}. \quad (3.48)$$

Cela donne des valeurs de sensibilité assez remarquables $\left(\frac{N}{\Delta f}\text{ basse}\right)$ parce que $\frac{R_{//}}{R_c}$ apparaît en facteur et

$$\frac{R_t}{R_c} \approx \frac{R_E}{R_c} \approx 10^{-2} \text{ à } 10^{-3}.$$

De cette façon nous obtenons pour les valeurs de

$$\eta_{\text{opt}} \approx 0{,}1 \text{ à } 0{,}2; \quad p(0) \approx 20; \quad p_E \approx 30; \quad \frac{R_t}{R_c} \approx \frac{1}{2} \text{ à } \frac{1}{4};$$

$$\frac{N}{\Delta f}[kT_0] = 500 - 2000[kT_0].$$

Le rapport $\frac{R_t}{R_c}$ peut être plus petit encore ainsi que p_t (posé = 100 ici).

Ainsi il est permis de conclure que les valeurs de sensibilité d'un mélangeur à cristal pour haute fréquences avec transistron en premier étage moyenne fréquence peuvent être comparables à celles mesurées avec des montages à lampes.

Les valeurs choisies ici ne sont pas optimales. Une amélioration de la valeur semble bien possible.

Conclusion. — Une analyse du bruit et du rapport signal-bruit de montages avec transistrons a montré les difficultés dans les cas de tous les étages d'entrée de l'emploi d'un transistron. Les calculs montrent que l'utilisation du semi-conducteur à trois électrodes en amplificateur moyenne fréquence est la plus intéressante au point de vue de la sensibilité.

L'auteur se permet de remercier M. Sueur, Ingénieur en chef des P. T. T. et chef du département Transmission au Service des Recherches des P. T. T. pour l'intérêt qu'il a bien voulu apporter à ce travail.

Manuscrit reçu le 15 juillet 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

[19] Ragnar Holm. — Die technische Physik der Elekt. Kontakte, Berlin, 1941. J. Springer édit.

[20] Comparer [7] et les valeurs tabulaires de H. Rothe-W. Kleen, Elektronenröhren als Schwingungserzeuger ù Gleichrichter. Akademische Verlagsgesel, 1941, Leipzig, p. 121.

[21] Bardeen J. et Brattain W. H. — Physical principles involved in Transistor action. *Phys. Rev.*, 1949.

[22] R. Sueur : Le Transistron Triode Type P. T. T. 601. *L'Onde Électrique*, **29**, n° 272, p. 389.

[23] Mataré H. F. — Methoden zur Berechnung der Empfindlichkeiten im Dezimeter-und Zentimeter-Wellengebiet. *Archiv. für elektrische Uebertragung*, 1949, **3**, 241.

[24] Mataré H. F. — Der Mischwirkungsgrad von Dioden, *Zschr. f. Hochfrequenztechnik und Elecktroakustik*. 1943, **62**, 165.

[25] Mataré H. F. — Bruit de fond des semi-conducteurs. I, *J. Phys. Radium*, 1949, **10**, 364.

SUR LA DÉFINITION DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES MAILLÉS DONT L'ÉQUATION AUX FRÉQUENCES PROPRES A SES RACINES A L'INTÉRIEUR D'UN CERCLE DONNÉ

Par MAURICE PARODI.
Institut Henri Poincaré.

Sommaire. — On établit des conditions suffisantes pour que l'équation aux pulsations propres d'un réseau passif et dissipatif à n mailles indépendantes ait ses racines à l'intérieur d'une circonférence centrée sur l'axe réel et située toute entière à gauche de l'axe imaginaire; on en déduit une méthode de définition des réseaux maillés ayant leurs facteurs d'amortissement compris, en valeur absolue, entre deux limites données.

1. **Introduction.** — Soit un réseau électrique passif et dissipatif à n mailles indépendantes, caractérisé par les trois matrices *définies positives* de ses selfs inductances, de ses élasticités et de ses résistances

$$(l_{jk}), \quad (r_{jk}), \quad (s_{jk}).$$

L'équation aux fréquences propres de ce réseau s'écrit

$$\| l_{jk} z^2 + r_{jk} z + s_{jk} \| = 0, \tag{1}$$

le déterminant étant symétrique, d'ordre n et ses éléments réels; les racines sont à partie réelle négative.

Nous nous proposons de donner une méthode de construction des réseaux maillés pour lesquels les racines de l'équation (1) se trouvent à l'intérieur d'une circonférence ayant son centre sur l'axe réel du plan des z et située toute entière dans le demi-plan de gauche.

Nous saurons ainsi définir des réseaux dont les facteurs d'amortissement [partie réelle des racines de (1)] sont compris entre deux limites données et les pulsations propres [partie imaginaire des racines de (1)] sont inférieures à une limite donnée.

2. **Conditions suffisantes pour que les racines de l'équation (1) se trouvent à l'intérieur du cercle unité ou d'un cercle de rayon R centré sur l'origine.** — Nous traitons ce problème à titre d'introduction au paragraphe suivant. Supposons l'équation (1) satisfaite pour une certaine valeur de z; alors le système d'équations linéaires et homogènes en $X_j^{(1)}$

$$\sum_{k=1}^{n} (l_{jk} z^2 + r_{jk} z + s_{jk}) X_k^{(1)} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

admet un ensemble de solutions non nulles en $X_j^{(1)}$.

En posant

$$z^p X_k^{(1)} = X_k^{(p+1)} \quad (p = 1, 2), \tag{3}$$

le système (2) est équivalent au suivant

$$\left.\begin{array}{r} \sum_{k=1}^{n} l_{jk} X_k^{(3)} + \sum_{k=1}^{n} r_{jk} X_k^{(2)} + \sum_{k=1}^{n} s_{jk} X_k^{(1)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -X_k^{(3)} + z X_k^{(2)} = 0, \\ -X_k^{(2)} + z X_k^{(1)} = 0, \end{array}\right\} \tag{4}$$

qui admet également un ensemble de solutions non nulles en $X_k^{(1)}$, $X_k^{(2)}$, $X_k^{(3)} (k = 1, 2, \ldots, n)$.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que le déterminant des coefficients des inconnues de (3) soit nul, ce qui s'écrit

$$\begin{vmatrix} (l_{jk}) & (r_{jk}) & (s_{jk}) \\ -I_n & z I_n & 0 \\ 0 & -I_n & z I_n \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

(l_{jk}), $r_{jk})$ et $s_{jk})$ étant les matrices caractéristiques du réseau et I_n la matrice unité d'ordre n.

D'après un théorème classique de M. Hadamard (1), ce déterminant ne peut s'annuler si

$$|z| \geq 1.$$

$$|l_{jj}| > \sum_{k \neq j} |l_{jk}| + \sum_{k} |r_{jk}| + \sum_{k} |s_{jk}| \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Comme dans un réseau, les l_{jk} (comme d'ailleurs les r_{jj} et s_{jj}) sont positifs, il apparaît que des conditions suffisantes pour que les racines de l'équation (1) se trouvent à l'intérieur du cercle unité s'écrivent

$$\left.\begin{array}{c} l_{jj} > \sum_{k \neq j} |l_{jk}| + \sum_{k} |r_{jk}| + \sum_{k} |s_{jk}| \\ (j, k = 1, 2, \ldots, n) \end{array}\right\} \tag{6}$$

et l'on peut en déduire immédiatement des conditions suffisantes pour que les racines de l'équation (1) soient à l'intérieur d'un cercle de rayon R centré sur l'origine; elles s'expriment par les inégalités

$$\left.\begin{array}{l} R^2 l_{jj} > R^2 \sum\limits_{k \neq j} |l_{jk}| + R \sum\limits_{k} |r_{jk}| + \sum\limits_{k} |s_{jk}| \\ (j, k = 1, 2, \ldots, n). \end{array}\right\} \quad (7)$$

Nous saurons ainsi définir des réseaux maillés dont les pulsations propres seront inférieures à une limite donnée R et les facteurs d'amortissement inférieurs, en valeur absolue, à R.

Notons que les conditions (6) et (7) sont un cas particulier de conditions plus générales qui suffisent pour que les zéros d'un déterminant dont les éléments sont constitués par des polynomes en z, se trouvent à l'intérieur du cercle unité [2].

3. **Conditions pour que les racines de l'équation (1) se trouvent à l'intérieur d'un cercle ayant son centre sur l'axe réel et situé dans le demi-plan de gauche.** — Traitons en premier lieu le cas d'une circonférence de rayon unité et de centre $(-a, 0)$, a étant positif et supérieur à l'unité (*fig.* 1).

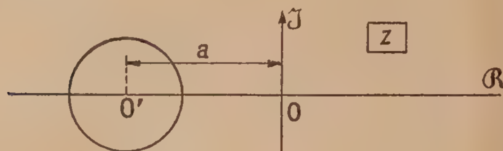


Fig. 1.

Posons $u = z + a$, l'équation (1) s'écrit

$$\left.\begin{array}{l} \| l_{jk} u^2 + (r_{jk} - 2 a l_{jk}) u + (l_{jk} a^2 - r_{jk} a + s_{jk}) \| = 0 \\ (j, k = 1, 2, \ldots, n) \end{array}\right\} \quad (8)$$

et, d'après les résultats du paragraphe 2, pour que ses racines se trouvent à l'intérieur du cercle de rayon unité et de centre O', il suffit que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l} l_{jj} > \sum\limits_{k \neq j} |l_{jk}| + \sum\limits_{k=1}^{n} |r_{jk} - 2 a l_{jk}| \\ \qquad + \sum\limits_{k=1}^{n} |l_{jk} a^2 - r_{jk} a + s_{jk}| \\ (j, k = 1, 2, \ldots, n). \end{array}\right\} \quad (9)$$

La grandeur a étant donnée, des valeurs de l_{jk}, r_{jk} et s_{jk} satisfaisant aux inégalités précédentes et telles que les matrices (l_{jk}), (r_{jk}) et (s_{jk}), caractéristiques du réseau maillé, soient définies positives, permettent de définir le réseau cherché : ses facteurs d'amortissement se trouvent compris entre les limites

$$m = -(1 + a), \quad M = 1 - a$$

et ses pulsations propres sont inférieures à l'unité.

Notons que pour le choix des valeurs des éléments l_{jk}, r_{jk} et s_{jk} qui rendent les matrices (l_{jk}), (r_{jk}) et (s_{jk}) définies positives, on peut utiliser les conditions suffisantes

$$\left.\begin{array}{l} l_{jj} > \sum\limits_{k \neq j} |l_{jk}|, \quad r_{jj} > \sum\limits_{k \neq j} |r_{jk}|, \\ s_{jj} > \sum\limits_{k \neq j} |s_{jk}| \\ (j, k = 1, 2, \ldots, n) \end{array}\right\} \quad (10)$$

que nous avons établies par ailleurs [3].

Les résultats précédents nous permettent maintenant de donner des conditions suffisantes pour qu'un réseau passif et dissipatif à n mailles indépendantes ait ses fréquences complexes [racines de l'équation (1)] à l'intérieur d'un cercle de rayon R et de centre $(-a, 0)$ $(0 < R < a)$ (*fig.* 2).

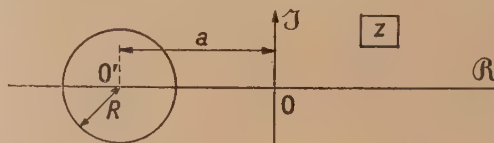


Fig. 2.

Il faudra choisir les éléments l_{jk}, r_{jk}, s_{jk} de façon que les matrices

$$(l_{jk}), \quad (r_{jk}), \quad (s_{jk})$$

soient définies positives et que de plus soient satisfaites les inégalités

$$\left.\begin{array}{l} R^2 l_{jj} > R^2 \sum\limits_{k \neq j} |l_{jk}| + R \sum\limits_{k=1}^{n} |r_{jk} - 2 a l_{jk}| \\ \qquad + \sum\limits_{k=1}^{n} |l_{jk} a^2 - a r_{jk} + s_{jk}| \\ (j, k = 1, 2, \ldots, n). \end{array}\right\} \quad (11)$$

Les facteurs d'amortissement de ce réseau seront compris entre les limites

$$m = -(R + a), \quad M = R - a$$

et ses pulsations propres inférieures à R.

A titre d'exemple, proposons-nous de définir un réseau à deux mailles indépendantes identiques dont les parties réelles des racines de l'équation aux

[1] Leçons sur la propagation des ondes, Paris, 1903.
[2] M. Parodi, *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **229**, p. 1190.

[3] *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, p. 51.

fréquences propres soient comprises, en valeur absolue, entre 10^3 et 5.10^3.

Nous pouvons prendre

$$R = 2.10^3, \qquad a = 2.10^3 + 10^3 = 3.10^3$$

et les pulsations propres seront inférieures à 2.10^3.

Les éléments des matrices (l_{jk}), (r_{jk}) et (s_{jk}) doivent satisfaire à l'unique inégalité

$$\begin{aligned} 4.10^6 l_{11} > 4.10^6 |l_{12}| &+ 2.10^3 |r_{11} - 6.10^3 l_{11}| \\ &+ 2.10^3 |r_{12} - 6.10^3 l_{12}| \\ &+ |9.10^6 l_{11} - 3.10^3 r_{11} + s_{11}| \\ &+ |9.10^6 l_{12} - 3.10^3 r_{12} + s_{12}|, \end{aligned} \tag{12}$$

tout en rendant les matrices susvisées définies positives.

Nous pouvons fixer la matrice (r_{jk}), définie positive, et déterminer les éléments l_{jk} et s_{jk} de manière que les expressions

$$|r_{jk} - 6.10^3 l_{jk}|, \qquad |9.10^6 l_{jk} - 3.10^3 r_{jk} + s_{jk}|$$

soient nulles.

Nous pouvons prendre, par exemple,

$$l_{11} = \frac{r_{11}}{6.10^3}, \qquad |l_{12}| = \frac{|r_{12}|}{6.10^3} \qquad (r_{12},\ l_{12} < 0);$$

$$\begin{aligned} s_{11} &= 3.10^3 r_{11} - 9.10^6 l_{11} \\ &= 3.10^3 r_{11} - \frac{9.10^6}{6.10^3} r_{11} = \frac{3}{2}.10^3 r_{11}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |s_{12}| &= |3.10^3 r_{12} - 9.10^6 l_{12}| \\ &= \left| 3.10^3 r_{12} - \frac{9.10^6}{6.10^3} r_{12} \right| = \frac{3}{2}.10^3 |r_{12}| \quad (s_{12},\ r_{12} < 0). \end{aligned}$$

Fixons maintenant la matrice (r_{jk}); nous pouvons poser arbitrairement

$$r_{jk} = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 10 \end{pmatrix},$$

la matrice étant évidemment définie positive; les résistances sont, d'autre part, supposées exprimées en ohms.

Il vient alors

$$l_{11} = \frac{5}{3}.10^{-3}, \qquad l_{12} = \frac{4}{3}.10^{-3},$$

les selfs inductances étant exprimées en henrys, et

$$s_{11} = \frac{3}{2}.10^4, \qquad |s_{12}| = 1,2.10^4;$$

les capacités $c_{11} = \frac{1}{s_{11}}$ et $|c_{12}| = \frac{1}{|s_{12}|}$ étant exprimées en farads.

Les matrices caractéristiques du réseau s'écrivent ainsi

$$(l_{jk}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}.10^{-3} & -\frac{4}{3}.10^{-3} \\ -\frac{4}{3}.10^{-3} & \frac{5}{3}.10^{-3} \end{pmatrix},$$

$$(r_{jk}) = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 10 \end{pmatrix},$$

$$(s_{jk}) = \begin{pmatrix} 1,5.10^4 & -1,2.10^4 \\ -1,2.10^4 & 1,5.10^4 \end{pmatrix}$$

et elles sont définies positives.

Le réseau a l'allure figurée ci-dessous (*fig.* 3).

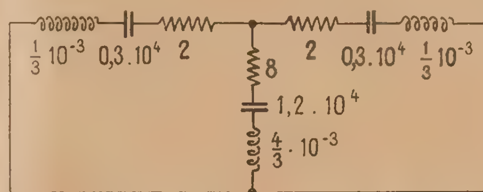


Fig. 3.

Notons qu'en modifiant légèrement les valeurs des éléments des matrices (l_{jk}), (r_{jk}) et (s_{jk}) que nous venons de définir, de manière qu'elles demeurent définies positives et que l'inégalité (12) reste satisfaite, nous saurons définir d'autres réseaux jouissant de la propriété imposée.

Manuscrit reçu le 13 décembre 1949.

MESURE DES FLUX INTENSES DE NEUTRONS LENTS PAR LA MÉTHODE PHOTOGRAPHIQUE

Par Raymond LOCQUENEUX.

Sommaire. — Une méthode de dosage direct des flux importants de neutrons lents indiquée par P. Cüer [1] utilisant la réaction des neutrons lents sur l'azote des émulsions photographiques nucléaires a été mise au point pour l'étude des neutrons des piles atomiques.

La longueur de la trace du proton émis dans la réaction a été calculée. Le pouvoir d'arrêt pour des protons ayant cette énergie a été déterminé et un nouveau point de la courbe parcours-énergie a été fixé pour les émulsions C_2 Ilford.

Le coefficient de pureté du flux des neutrons ralentis a été évalué et l'étude du spectre des neutrons rapides amorcée.

Introduction. — Conformément à la théorie du ralentissement et aux résultats expérimentaux de ces quinze dernières années, on appelle neutrons lents, ceux dont l'énergie est inférieure à quelques électronvolts, parmi ceux-ci, nous considérerons seulement ceux qui sont diffusés par une substance de température absolue T et dont le spectre correspond à une répartition de Maxwell caractérisée par une température absolue voisine de T.

Ils peuvent être obtenus par ralentissement à l'aide de chocs élastiques ou inélastiques avec tout noyau suffisamment léger, l'hydrogène par excellence (paraffine par exemple) à partir des sources de neutrons naturelles (Ra-Be; Rn-Be; Mth-Be), ou artificielles (tubes à H. T. cyclotrons,).

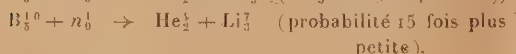
Il s'en produit aussi dans les réacteurs ou piles atomiques. Les neutrons de la fission de l'U_{235} sont ralentis dans le modérateur (D_2O, graphite) et dans les barres d'uranium. Ce sont là les sources expérimentales actuelles les plus importantes, particulièrement intéressantes car elles sont exemptes, à un très haut degré, de neutrons rapides.

Dans ce domaine d'énergie les neutrons provoquent trois réactions importantes donnant des particules lourdes ionisantes.

1° Avec l'isotope 10 du bore (deux possibilités) :



$$B_5^{10} + n_0^1 \rightarrow He_2^4 + {}^*Li_3^7 \quad ({}^*Li_3^7 \text{ excité à 480 keV}),$$



$$B_5^{10} + n_0^1 \rightarrow He_2^4 + Li_3^7 \quad (\text{probabilité 15 fois plus petite}).$$

avec

$$Q \sim 3 \text{ MeV}.$$

2° Avec l'isotope 6 du lithium :



$$Li_3^6 + n_0^1 \rightarrow He_2^4 + H_1^3, \qquad Q \sim 4{,}7 \text{ MeV}.$$

3° Avec l'azote :



$$N_7^{14} + n_0^1 \rightarrow H_1^1 + C_6^{14*}, \qquad Q \sim 0{,}6 \text{ MeV}$$



$$(C_6^{14*} \text{ est } \beta \text{ actif : } C_6^{14*} \rightarrow \acute{e} + N_7^{14}).$$

Si une plaque contient l'un de ces éléments (B, Li, N) les particules émises laisseront des traces [1] facilement repérables dans la technique actuelle en dépit d'un certain voile dû aux rayons γ, même dans les émulsions sensibles telles les Ilford C_2 chargées ou non.

La quantité de mouvement incidente est pratiquement nulle : les particules sont émises dans des directions opposées et isotropiquement. Dans le cas de l'azote et du bore, la trace du noyau de recul, trop courte, ne se distingue pas.

L'énergie incidente est négligeable devant le Q de la réaction. Cette dernière énergie se répartit entre les particules émises dans le rapport inverse de leur masse : la longueur des deux traces est donc bien déterminée. La longueur totale est : avec B voisine de 7 μ, avec Li, de 43 μ, avec N, de 6 μ (*fig.* 1).

I. — Dosage d'un flux de neutrons lents.

1. **Principe du dosage.** — Soit un flux de neutrons (N cm^{-2} : s^{-1}) traversant normalement (*fig.* 2) une épaisseur e d'une émulsion qui contient M atomes par centimètre cube. Si n neutrons produisent une réaction, par définition la section efficace de l'élément est

$$s(v) = \frac{n}{N}\,\frac{1}{Me}.$$

On tire immédiatement

$$N = \frac{1}{s(v)}\,\frac{n}{Me}. \qquad (I)$$

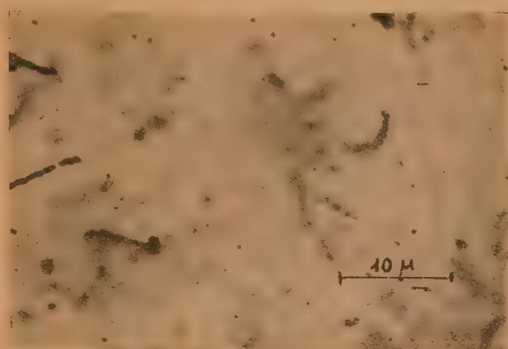
Notons que s dépend de la vitesse. Soient v cette vitesse, $|N^0|$ la densité des neutrons incidents, $|n^0| = \frac{n}{e}$ le nombre de réactions par unité de volume; on a

$$N = N_0 v \qquad \text{et} \qquad N_0 v = \frac{1}{s(v)}\,\frac{n_0}{M}.$$

Ceci est valable pour toute direction incidente; N et n_0 restent proportionnels. Dans le cas d'un flux monocinétique sans direction privilégiée, le résultat s'exprimera donc sous la forme

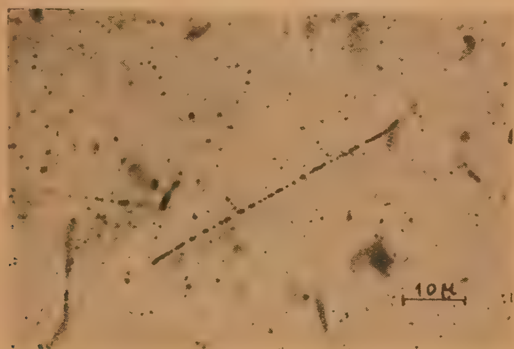
$$N = N_0 v = \frac{1}{s(v)}\,\frac{n_0}{M}. \qquad (II)$$

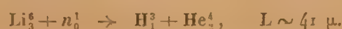
Si les neutrons ne sont pas monoénergétiques nous admettrons qu'il est possible de définir des



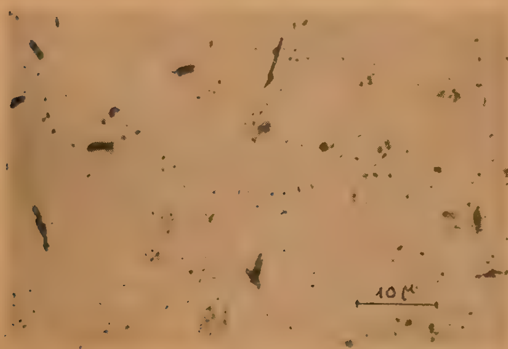


$B_5^{10} + n_0^1 \rightarrow He_2^4 + {}^*Li_3^7$, $L \sim 7{,}4$ μ.





$Li_3^6 + n_0^1 \rightarrow H_1^3 + He_2^4$, $L \sim 41$ μ.





$N_7^{14} + n_0^1 \rightarrow H_1^1 + C_6^{14*}$, $L \sim 6{,}3$ μ.

Fig. 1.

valeurs moyennes permettant d'utiliser les formules (I) et (II).

Au point de vue pratique, nous voulons calculer N. M est donné par le fabricant. Nous adoptons pour s des valeurs connues. Il suffit donc de déterminer expérimentalement

$$n_0 = \frac{n}{e}.$$

s est connue par d'autres expériences. Pour le bore (isotope 10), $s = 3000 \cdot 10^{-24}$ cm² ou 3000 barns.

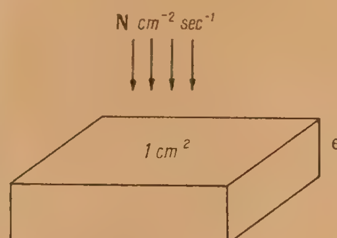


Fig. 2.

En fait on donne plutôt s pour le bore ordinaire (mélange des isotopes 10 et 11) : $s = 703$ barns. Pour le lithium commun : $s = 64$ barns. Pour l'azote nous avons pris 1,75 barns conformément à [2], [3] et [4]. On voit que, pour un flux donné, n_0 est proportionnel à s. Pour les flux importants, on utilisera la réaction avec l'azote de l'émulsion. Pour les flux plus faibles, on utilisera des émulsions chargées au bore ou au lithium.

2. **Détermination de n_0.** — Le flux incident et la répartition de l'azote dans l'émulsion étant homogènes, la distribution des traces indiquant les réactions produites sera elle aussi homogène. Si l'on compte le nombre de celles qui sont contenues dans des cylindres de même hauteur (épaisseur de l'émulsion) et de même diamètre (celui du champ), les valeurs observées seront réparties selon une loi de Laplace-Gauss de moyenne x_0 et d'écart type $\sigma = \sqrt{x_0}$.

e est l'épaisseur de l'émulsion vierge. Les dimensions de cette dernière étant petites par rapport à l'étendue du flux à mesurer, l'atténuation apportée au faisceau étant négligeable pour des émulsions d'épaisseur courante (50 à 100 μ), le verre ne contenant que de très faibles traces de bore, la mesure du flux peut s'effectuer dans des conditions de « bonne géométrie » particulièrement favorables, ce qui n'est souvent pas le cas des autres techniques (chambres à BF_3, isotopes à radioactivité artificielle).

1° Conditions d'observation et réalisation. — La statistique classique nous apprend que, pour obtenir une répartition régulière, il y a intérêt à prendre un intervalle de classe inférieur à $\frac{\sigma}{4}$. Il est d'au moins une trace. σ doit être supérieur à 4. Il faut donc une optique qui donne au moins 16 traces

par champ (sinon on groupera les champs). D'autre part, pour le comptage, il est difficile d'admettre plus de 40 traces par champ (encore doit-on le diviser).

Pour obtenir une densité convenable on peut aussi jouer sur le temps d'exposition de la plaque. Les traces ont environ 6 μ. Il y a intérêt à avoir un grossissement suffisant permettant la discrimination des traces inclinées.

2° Résultats obtenus sur une plaque. — Une émulsion Ilford C_2 d'épaisseur 63 μ a été exposée dans la colonne de graphite de la G. L. E. E. P. de Harwell [4], la direction moyenne incidente étant normale à la plaque. Les observations ont été faites avec un microscope Reichert muni d'un objectif 103 à immersion Reichert et d'un oculaire $\times 18$ Zeiss (grossissement intrinsèque 1854, diamètre du champ 80 μ). Le champ était divisé, par l'échelle micrométrique et un cheveu, en quatre quadrants.

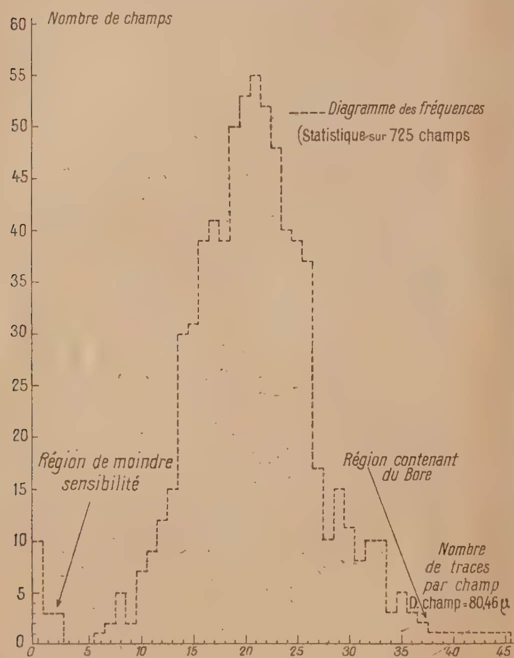


Fig. 3.

Les traces ont été comptées dans 725 champs (*fig.* 3) sur deux bandes prises dans la plaque.

Une première répartition sur 708 champs a été retenue (*fig.* 4) en éliminant une région anormalement faible ([1]). La moyenne arithmétique est $x_0 = 21{,}15$, l'écart type expérimental : $\sigma = 5{,}8$ (σ^2 : moyenne du carré des écarts). Nous avons utilisé le test de χ^2 pour vérifier si la répartition était gaussienne.

$$\chi^2 = \sum \frac{(f - f_t)^2}{f_t}$$

(f et f_t : fréquences réelle et théorique).

Les tables de Fisher indiquent 0,05 comme probabilité d'atteindre la valeur de χ^2 obtenue, à la limite de la tolérance ordinairement admise.

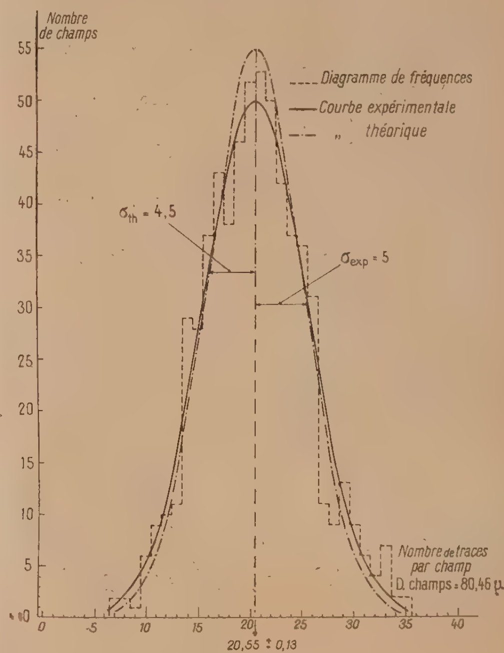


Fig. 4.

Mais le σ expérimental voisin de 5,8, s'éloigne assez du σ théorique voisin de 4,6.

L'élargissement de la courbe provient visiblement d'un certain nombre de valeurs peu probables ($21 + 3{,}3\,\sigma = 36$ avec une probabilité : 0,002). Elles appartiennent à une région de la plaque où la moyenne croît sensiblement. De plus, l'examen de la suite des fréquences relevées montre une région de moyenne nettement faible. Une étude des zones de distribution anormale a permis leur élimination systématique ([2]).

Une seconde répartition sur 626 champs a été ainsi obtenue (*fig.* 5). La moyenne est 20,55, le σ expérimental est 5, le σ théorique 4,5. Le test de χ^2 donne une probabilité supérieure à 0,1, la répartition est meilleure que la précédente. La distribution peut être considérée comme homogène.

([1]) *Cf.* : Chap. I, § 4, 42, *a*.

([2]) *Cf.* : Chap. I, § 4, 42, *a* et *b*.

3° Nombre de traces par centimètre cube d'émulsion. — Le diamètre du champ étant 80,5 μ on trouve

$$n = 4{,}04.10^5 \text{ par centimètre carré de plaque } (^3).$$

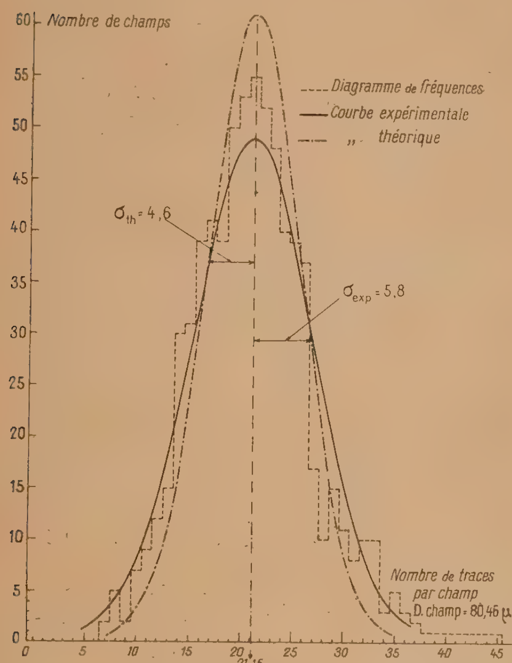


Fig. 5.

L'épaisseur de l'émulsion vierge étant $e = 63\ \mu$ on a

$$n_0 = \frac{n}{e} = 6{,}41.10^7 \text{ par centimètre cube d'émulsion.}$$

3. **Résultats-Précision de la méthode.** — Nous pouvons évaluer maintenant

$$N = \frac{1}{s}\,\frac{n_0}{M}.$$

La concentration de l'émulsion en azote est 0,067 g : cm³.

En prenant $s = 1{,}75$ barn on trouve

$$N = 1{,}97.10^{10}.$$

Précision. — Il y a un certain nombre de causes d'erreur systématique ou accidentelle :

sur le nombre de divisions du micromètre (diffraction sur les bords, centrage de l'échelle), environ 0,3 pour 100;

sur la concentration, donnée par le fabricant à 2 pour 100 près;

sur la section efficace de l'azote. Un certain désaccord existait entre les anciennes mesures approximatives de Lapointe et Rasetti et de Cüer [1] (donnant 1,3 barn par défaut) d'une part, et les mesures récentes des américains [3] (donnant 1,76 ± 0,05 barn) d'autre part. En raison des causes d'erreur rencontrées, la mesure a été reprise par Cüer (4) à l'aide dn générateur de Strasbourg en comparant une émulsion nucléaire à grains fins (Ilford E_1) et une émulsion au bore (Ilford C_2+B) situées à 30 cm d'une cible entourée de 5 cm de plomb, cible de $Be+D$ (1 Mév, 300 μA, 60 m) dans un bloc de paraffine de 70 cm d'arête. Les résultats actuels indiquent 1,75 barn avec une incertitude actuellement encore élevée à cause du bore [4].

Nous avons pris 1,75 barn à 3 pour 100 près.

Ce sont les erreurs de mesure que nous voudrions discuter.

L'étalonnage du micromètre oculaire a été réalisé avec une échelle Cooke, vérifiée par comparaison avec une échelle Zeiss et une échelle Stiassnie (5).

Cet étalonnage a été réalisé avec une précision suffisante sur une trentaine de mesures à ~ 0,2 pour 100 près.

Pour évaluer la précision sur la moyenne, nous avons calculé l'écart type sur la moyenne

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (n, \text{ nombre d'expériences}),$$

$$\sigma_0 = 0{,}20.$$

Nous avons pris pour valeur de l'incertitude l'écart probable

$$0{,}67\,\sigma_0 = 0{,}13.$$

Ce qui donne une précision de 0,6 pour 100.

La mesure des épaisseurs d'émulsions vierges peut se faire, soit au microscope en les examinant par la tranche (on casse la plaque, ou, on détache la gélatine de son support), soit au comparateur, ce qui présente le grand avantage de permettre la détermination précise de l'épaisseur de l'émulsion à l'endroit même où l'on fera les mesures. Les émulsions Ilford sont en général bien régulières à moins de 0,8 pour 100 près. Elles présentent toutefois, dans certaines zones, un amincissement pouvant aller jusqu'à 10 μ.

La mesure de l'épaisseur de l'émulsion vierge de Harwell n'a pu être faite. Nous avons calculé celle-ci à partir de l'épaisseur mesurée après développement, en admettant un coefficient de contraction déterminé sur des plaques du même type à 3 pour 100 près.

(3) Cette amélioration est postérieure à [5] après une étude systématique des régions de distribution anormale.

(4) Expériences effectuées par J. P. Lonchamp et collaborateurs.

(5) Ces deux dernières aimablement mises à notre disposition par M. Stiassnie.

4. Examen des difficultés expérimentales rencontrées. — 1° Perte des traces voisines de la verticale. — De telles traces deviennent difficiles à distinguer. On en voit cependant, beaucoup moins nombreuses que celles qui sont peu inclinées sur le plan de l'émulsion. Nous nous sommes assurés que le nombre de celles que l'on compte correspond bien au nombre théorique. On peut s'aider des remarques suivantes :

la longueur des traces est constante

$$6{,}31 \pm 0{,}04\ \mu\ \ (^6);$$

leur distribution est isotrope;

la distribution de leurs projections ne dépend pas du facteur de contraction (affinité normale au plan de l'émulsion). Nous avons étudié cette distribution sur $N = 346$ traces (les projections ont été ramenées à un nombre exact de divisions du micromètre).

Dans un angle solide élémentaire il s'en trouve en moyenne

$$\Delta n = N \sin\theta\, \Delta\theta$$

(ceci montre immédiatement pourquoi l'on observe beaucoup de traces peu inclinées sur l'horizontale).

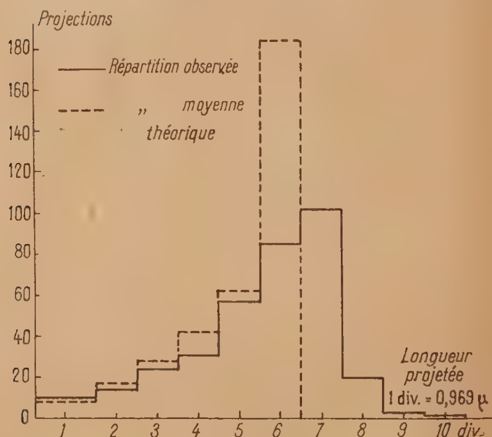


Fig. 6.

Soient l_0 la longueur moyenne de ces traces, σ l'écart type de la répartition de celles qui sont horizontales; ces Δn projections ont une longueur moyenne $l_0 \sin\theta$ et l'écart type de leur répartition est $\sigma' = \sigma \sin\theta$. Donc, au voisinage de la verticale, la répartition est serrée autour de la valeur moyenne.

En examinant cette répartition (*fig.* 6) on voit effectivement, qu'autour de la verticale, n suit cette distribution moyenne.

(6) *Cf.* : Chap. II, § 2.

Nous estimons que, dans les conditions opératoires, les traces pouvant être perdues ont une projection au plus égale à 3 divisions (2,9 μ). Elles sont dans un cône de demi-angle au sommet $\theta = 32°35'$, avec la probabilité

$$p = \frac{2\pi(1-\cos\theta)}{2\pi} = 0{,}157.$$

La fréquence observée est 0,139 avec un écart type

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{pq}{N}} = 0{,}02 \qquad \text{avec} \quad q = 1 - p.$$

L'écart observé est de 0,9 σ. Il n'est pas significatif. La perte des traces n'est pas appréciable.

2° Présence de régions anormales. — *a. Régions de faible moyenne.* — Dans certaines régions pouvant avoir jusqu'à 1,5 mm de diamètre, la densité de traces s'abaisse et peut devenir nulle (*fig.* 3). Cette disparition vient de la difficulté de distinguer les traces très discontinues des grains du voile. (Le critère de l'alignement joue peu, car ces traces sont courtes.) Cela peut venir :

d'une hétérogénéité de l'émulsion en Br Ag. Mais le pouvoir d'arrêt diminuant, les traces observées sont plus longues. Ceci a été vérifié dans quelques rares régions;

d'une attaque locale poussée du fixateur : en ce cas le phénomène est plus sensible en surface; on observera une cuvette sous laquelle les traces seront mieux marquées (une seule zone semblable a pu être observée);

d'un manque de sensibilité de l'émulsion (nombre de germes critiques plus faible). Les grains sont fins et rares, les traces plus courtes, car on perd les extrémités.

Ces régions forment la plupart des régions anormales. Mais si la densité linéaire des traces diminue, la densité du voile décroît en même temps. Nous avons mis en évidence une corrélation étroite entre ces deux variables (*fig.* 7). C'est donc là un critère sûr pour éliminer de telles régions : là où la densité moyenne du voile faiblit, la statistique sera faussée par une moyenne sous-estimée.

La diminution du nombre de traces peut être observée sur la périphérie de la plaque. Cette diminution est due à une pénétration plus rapide et, par suite, à une action plus longue des produits du développement. Cette zone dépend de l'émulsion et du temps de développement. Si le révélateur développe plus de grains du voile et les enrichit ainsi que ceux des traces, le fixateur ronge ces grains. Mais le voile reste plus dense que dans les zones ordinaires, tandis que le nombre de grains des traces reste le même. Ces deux actions consécutives ont pour effet de masquer une certaine proportion des traces.

On prendra donc soin de mener le dosage au centre de la plaque.

b. Régions de plus forte moyenne. — Une région de 2 mm de diamètre présente une moyenne de 30 traces par champ, au lieu de 21.

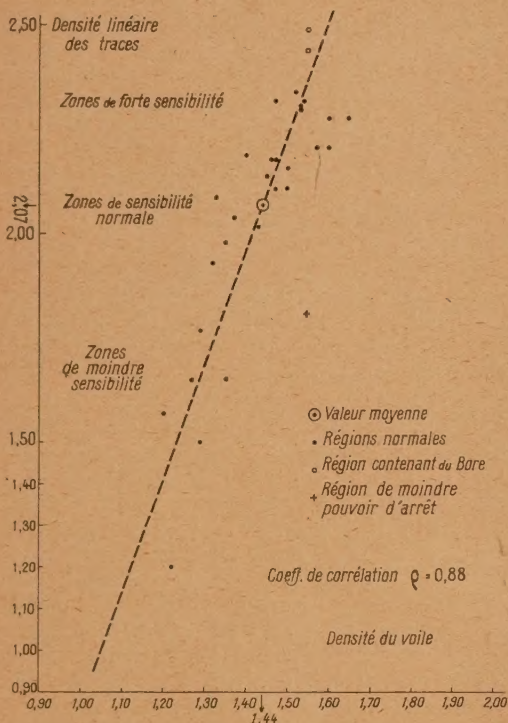


Fig. 7.

L'épaisseur de l'émulsion y est la même que celle des autres régions explorées (avec des variations de 2 pour 100). Si cette augmentation vient d'une concentration plus forte en azote donc en gélatine (~ 43 pour 100), Br Ag est en bien moindre quantité qu'ailleurs (~ 43 pour 100 aussi) et, par suite, le voile diminue dans le même rapport. Mais il est le même à 0,5 pour 100 près, il faut rejeter l'hypothèse.

Dans la partie centrale (0,6 mm de diamètre) où la moyenne atteint 34 traces par champ, ces dernières ont une longueur de 6,7 μ au lieu de 6,3 μ (7). De plus, certaines sont très marquées, épaisses. Tout ceci semble confirmer la présence locale d'impuretés de bore. Dans cette plaque, le bore donne des traces devant mesurer ~ 7,2 μ, ce qui explique la longueur moyenne trouvée (un calcul simple donne 6,6 μ). Sa section efficace étant 450 fois plus forte que celle de l'azote, il faut 1 atome de bore pour 1000 d'azote, pour que le nombre de traces augmente de 43 pour 100. La présence de traces de particules α du bore explique aussi que la densité linéaire moyenne des traces soit plus forte que la normale (*fig.* 7).

c. Traces parasites dues au bore. — Un examen détaillé de ce point sera fait après étude de la répartition des traces en longueur (8).

5. **Conclusion.** — La méthode utilisée a l'avantage d'être très directe. En faisant varier la composition de l'émulsion et l'épaisseur, on peut doser de 10^7 à 10^{12} neutrons : cm^2; comme la méthode est intégratrice on peut doser des flux plus faibles qu'avec des éléments radioactifs artificiels ou BF_3. Avec une technique soignée la précision peut dépasser celle qu'on obtient avec des éléments radioactifs (quelques pour 100). Elle est la seule capable de détecter la composition énergétique entière d'un faisceau neutronique.

II. — Calcul du parcours pour des protons de 0,54 MeV.

1. **Principe.** — Depuis les travaux de P. Cüer [1] la détermination du *Q* de la réaction est maintenant assurée. En évaluant le parcours de C^{14} grâce à des mesures directes également améliorées (chambre de Wilson) et grâce à un calcul de pouvoir d'arrêt, nous avons pu déduire le parcours de nos protons de faible énergie.

Un point de la courbe parcours-énergie pour les émulsions a été ainsi fixé indépendamment des points de la courbe correspondante pour l'air établie par Livingston-Bethe, actuellement mise en défaut. Un tel point est nécessaire pour la compréhension des questions de pouvoir d'arrêt dans les émulsions nucléaires aux faibles vitesses et pour assurer l'extrapolation de la courbe classique de Lattès, Fowler, Cüer vers les faibles énergies.

2. **Mesure de la longueur totale des traces.** — Comme il y a distribution isotrope des traces, on peut prendre celles qui sont au point dans le plan de visée. Nous verrons que nous pouvons les considérer comme parallèles à ce plan.

Il faut éviter de déplacer la plaque pour ramener les traces d'un champ dans la largeur de l'échelle (on risque de mesurer deux fois la même ou d'en négliger certaines). Il est préférable de faire subir une translation continue à la plaque et de balayer avec l'échelle un petit angle fixe.

Nous avons ramené les longueurs à un nombre exact de divisions du micromètre. Ceci est légitime,

(7) *Cf.* : Chap. II, § 2.

(8) *Cf.* : Chap. II, § 3, 32.

car la diffraction sur les grains des extrémités ne permet pas d'apprécier à coup sûr la demi-division. Nous avons fait remarquer que la longueur des traces était bien déterminée ([9]). En réalité les longueurs mesurées sont réparties suivant une loi de Laplace-Gauss autour de cette longueur moyenne, par suite des fluctuations dues aux grains (nombre, répartition, grosseur, etc. [6]). Une statistique a été dressée sur 500 traces prises par groupes de 50 à travers la plaque (*fig.* 8). Le test de χ^2 montre

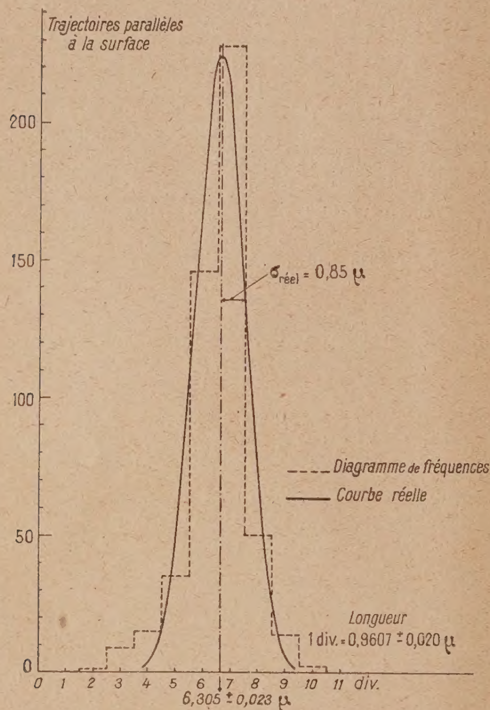


Fig. 8.

que la répartition peut être considérée comme gaussienne. Nous avons trouvé une longueur moyenne de 6,564 divisions avec $\sigma = 1,11$ division. σ est de l'ordre de l'intervalle de classe qui est ici d'une division. Une correction effectuée par tables fournit un σ réel de 0,89 division.

Une division du micromètre correspondait à 0,9606 μ. Ce qui donne $l_0 = 6,306\ \mu$, $\sigma = 0,853\ \mu$ avec un écart type sur l_0 : $\sigma_0 = 0,038\ \mu$ et un écart probable de 0,026 μ.

La précision statistique est 0,4 pour 100; la précision de l'étalonnage 0,2 pour 100.

On a ainsi

$$l_0 = 6,31 \pm 0,04\ \mu.$$

([9]) *Cf.* : Introduction.

3. **Examen des causes possibles d'erreur.** — 1° Erreur due a la mise au point. — La latitude de mise au point est $\sim 1\ \mu$. Une trajectoire entièrement au point peut donc faire un angle avec l'horizontale. Cet angle θ a une tangente au plus égale à $\frac{1}{6,3} = 0,158$. La longueur moyenne des traces étant 6,5 divisions, la variation maximum de leur projection est

$$6,5 \cos\theta = 0,08 \text{ division}.$$

Elle est inappréciable. En effet, dans la statistique nous avons dû ramener la longueur des traces mesurées à un nombre exact de divisions. La différence entre la longueur vraie et la longueur attribuée peut donc être égale à une demi-division, bien supérieure à 0,08 division.

2° Présence de bore. — En dehors de la zone signalée ([10]), l'émulsion contient moins d'un atome de bore pour 10 000 d'azote [7]. Ceci détermine une contribution maximum de 4,5 pour 100 de traces dues à la présence de bore. Le groupe des petits parcours α + Li, 15 fois plus important que celui des longs, pourrait seul être décelable dans la statistique. Il représente au maximum 4,2 pour 100 des traces relevées. Ce parcours, dans la plaque examinée, serait 7,2 μ, si bien que la longueur réelle des traces $p + C^{14}$ de N, devrait être en réalité 6,34 μ, au lieu de 6,31 μ. Cet écart de 0,03 μ, bien inférieur à $2\sigma_0 = 0,08\ \mu$ n'est pas significatif. Nous pouvons donc conserver $l_0 = 6,31\ \mu$. Nous voyons que la contribution réelle apportée par le bore n'est pas décelable par cette méthode.

4. **Parcours du proton de la réaction N^{14} (n, p) C^{14}* ([1]) dans les émulsions Ilford C_2.** — Les valeurs de Q les plus récentes admises par les différents auteurs varient de 0,59 à 0,63 MeV. L'énergie prise par C^{14} est

$$\frac{600}{15} = 40 \text{ keV}.$$

Hughes et Eggler et les courbes de Wrenshall (établies pour C^{12}) donnent alors pour parcours dans l'air de C^{14} des valeurs comprises entre 0,025 et 0,035 cm.

L'incertitude sur le calcul du pouvoir d'arrêt effectif de l'émulsion à cette faible énergie est telle, dans l'état de la théorie, qu'il nous faut adopter 1500 et 2000 comme valeurs limites extrêmes. On peut prendre pour parcours du C^{14} dans la plaque

$$0,18 \pm 0,05\ \mu.$$

Ce qui donne pour celui du proton

$$6,13 \pm 0,09\ \mu.$$

([10]) *Cf.* : Chap. I, § 4, 42, *b*.

5. **Établissement d'un point de la courbe « parcours-énergie » du proton pour ces émulsions.** — Le calcul de Q avec les valeurs les plus récentes du dernier point du spectre β de C^{14} et de la différence $n_0^1 - H_1^1$ donne pour énergie du proton

$$0{,}56 \pm 0{,}01 \text{ MeV}.$$

La considération de travaux récents sur cette réaction et la réaction inverse C^{14} (p, n) N^{14}, incite à augmenter quelque peu l'incertitude, soit

$$0{,}56 \pm 0{,}02 \text{ MeV}.$$

Ce résultat, et celui que nous avons précédemment établi, permettent d'assurer un point de la courbe parcours-énergie du proton pour les émulsions Ilford C_2.

6. **Valeur du pouvoir d'arrêt de ces émulsions pour des particules chargées de faible énergie.** — La validité des valeurs données par les points de la courbe parcours-énergie de Livingston-Bethe (1937) pour des protons de faible vitesse a été mise en cause récemment par différents expérimentateurs. Utilisant la pente de la courbe et un point donné par [7] il vient, pour un proton d'énergie 0,56 ± 0,02 MeV, un parcours dans l'air pouvant varier entre 0,96 et 1,05 cm.

Ceci donne pour le pouvoir d'arrêt de l'émulsion à cette énergie 1640 ± 90, valeur rendant probable, soit un Q quelque peu supérieur à 0,6 MeV, soit un pouvoir d'arrêt de l'émulsion pour C^{14} relativement élevé.

Influence de l'émulsion. — En tenant compte de la statistique des longueurs des traces d'une part, du développement poussé de la plaque, de la régularité de grosseur et de répartition des grains, d'autre part, il est naturel de penser que le straggling est dû uniquement à l'adjonction d'un ou deux grains à une trace de longueur fixe. Comme le parcours moyen de C^{14} est de l'ordre de grandeur du diamètre d'un grain (c'est le cas du moins des émulsions C_2 très sensibles) ceci autorise à le soustraire du parcours total pour obtenir celui du proton.

La mesure des petites traces dans une émulsion amène une légère surestimation du parcours vrai. Si bien que le pouvoir d'arrêt doit tendre vers des valeurs inférieures à 1600 (qui est d'ailleurs la valeur théorique la plus probable à cette vitesse).

Conclusion. — Bien que nous ayions utilisé dans ces calculs les bandes d'erreur les plus larges, la précision du point ainsi déterminé pour la courbe parcours-énergie des protons de faible vitesse dans l'émulsion est supérieure à celle de la courbe actuelle correspondant dans l'air.

III. — Coefficient de pureté.

Le flux des neutrons incidents contient des neutrons rapides qui, pendant leur parcours dans les retardateurs n'ont pas été complètement ralentis (filtrage exponentiel ou réaction neutron-neutron surtout fréquente dans des noyaux assez lourds à cause de la barrière de potentiel). Le coefficient de pureté est le rapport du nombre de neutrons rapides au nombre des neutrons ralentis.

Principe de la mesure. — Ces neutrons rapides donnent des protons de recul avec l'hydrogène de la gélatine. Le nombre des neutrons rapides incidents pourra donc être déterminé par

$$N_{\text{H}} = \frac{1}{s_{\text{H}}} \frac{n_{\text{H}}}{M_{\text{H}}};$$

n_{H}, nombre de protons de recul par centimètre cube;
M_{H}, nombre d'atomes d'hydrogène par centimètre cube;
s_{H}, section de choc de l'hydrogène pour les neutrons rapides incidents.

Il faut donc connaître le spectre d'énergie de ces derniers.

1. **Spectre des neutrons rapides.** — Une idée

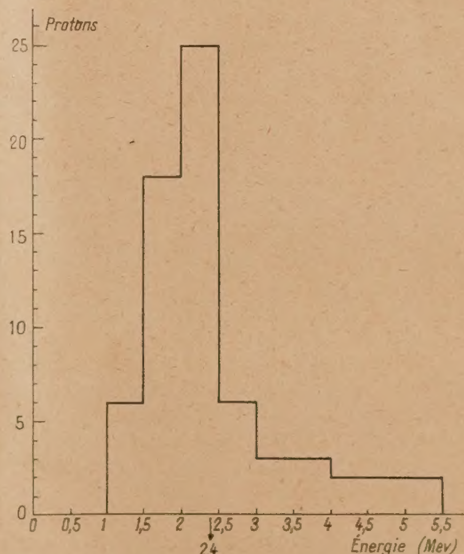


Fig. 9 *a*.

nous en sera donnée en dressant celui des protons contenus entièrement dans la gélatine.

Nous en avons relevé 67, pour une surface explorée de 65,125 mm² ayant une énergie supérieure à 0,7 MeV

(*fig.* 9 *a*). L'énergie moyenne est 2,4 MeV. Supposant isotrope l'émission des protons dans le système du centre de gravité de l'ensemble neutron-proton (comme il est admis actuellement) et utilisant les nombreux résultats expérimentaux relevés dans la documentation, nous adoptons $s_{\text{H}} \sim 10$ barns, s_{H} étant ajusté pour chaque énergie.

Remarques sur la répartition. — L'étendue du spectre d'énergie est qualitativement en accord avec ce qu'on connaît sur celui des neutrons provenant de la fission de l'uranium.

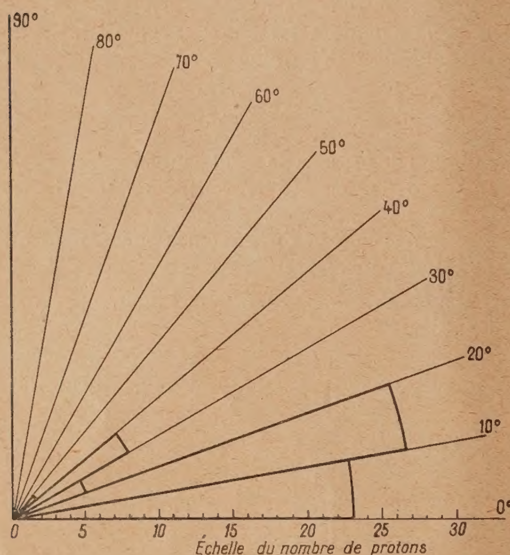


Fig. 9 *b*.

Le pic à 2 MeV paraît anormal. Ces parcours de 40 μ ont une plus grande probabilité d'être contenus dans l'émulsion d'épaisseur 63 μ.

Une répartition angulaire par rapport au plan de l'émulsion montre que la plupart ont été observés entre 0 et 40° (*fig.* 9 *b*), ce qui est normal puisque les traces peu inclinées ont moins de chance de sortir.

La moyenne de l'énergie des protons, assez faible, laisse supposer que les protons sont bien émis isotropiquement.

2. **Nombre des protons rapides.** — 118 traces assimilables à des protons rapides ont été observées dans l'exploration des 65,125 mm². Mais un certain nombre n'en sont probablement pas, elles sont peut être des α de contamination affaiblies. Les protons s'échappant dans le verre sont plus sûrs : on ne risque pas de se tromper sur le sens et donc de les confondre avec des α affaiblies. La répartition étant isotrope, il y a autant de protons qui sortent dans le verre que dans l'air. Pour avoir un autre ordre de grandeur, nous pouvons ajouter, aux protons contenus dans la gélatine, deux fois le nombre de ceux qui partent dans le verre. Ce qui donne 91.

Nous avons donc pris 105 à 15 pour 100 près (ce qui est aussi l'ordre de grandeur de l'incertitude sur s_{H}).

3. **Calcul du coefficient de pureté.** — On a

$$N = \frac{1}{s}\,\frac{n}{M}.$$

Or M est proportionnel à la concentration c, et inversement proportionnel à la masse atomique.

On a donc

$$\frac{N_{\text{H}}}{N_{\text{Az}}} = \frac{s_{\text{Az}}}{s_{\text{H}}}\,\frac{n_{\text{H}}}{n_{\text{Az}}}\,\frac{c_{\text{Az}}}{c_{\text{H}}}\,\frac{\text{H}}{\text{Az}}.$$

La concentration en hydrogène étant 0,056 g : cm³ on obtient

$$\frac{N_{\text{H}}}{N_{\text{Az}}} = 4{,}3.10^{-6} \qquad \text{(à 25 pour 100 près).}$$

Ce travail a été effectué durant l'année 1948-1949 au Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure.

Je remercie très sincèrement M. le Professeur M. Morand d'avoir bien voulu diriger ce travail et d'avoir mis à ma disposition les ressources de son laboratoire.

Je remercie très vivement M. le Docteur P. Cüer de m'avoir proposé cette étude, d'avoir mis à ma disposition des plaques exposées aux piles atomiques et de m'avoir constamment guidé dans l'interprétation des résultats.

Mes remerciements vont aussi à M. Guerrier pour les conseils pratiques qu'il m'a donnés et les améliorations techniques qu'il a apportées à l'observation des plaques, à M. Desprez qui a développé et tiré les clichés qui m'étaient nécessaires, à tous mes collègues du laboratoire pour l'atmosphère de sympathie qu'ils ont su y faire régner.

Manuscrit reçu le 24 juin 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Cüer P. — *J. Phys. et Radium*, 1947, **3**, 83.
[2] Segré Chart. — The Science and engineering of Nuclear Power, 1947, vol. 1.
[3] Coon J. — Nobles, *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1358.
[4] Cüer P. — Congrès Int. de Phys. Nucl. (Bâle), sept. 1949.
[5] Cüer P., Morand M., King T. et Locqueneux R. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 557.
[6] Cüer P. — *Thèse* (Paris).
[7] Ilford Ltd. — Communication privée.
[8] Cornog I. C., Franzen W. et Stephens W. E. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 1.

Le Gérant : Maurice Blondin. 134609 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1950.